16as
Olimpíadas Nacionais de Astronomia

Prova Teórica da Final Nacional

3 de Junho de 2022
11:00
Duração máxima – 120 minutos

Notas:

- Lê atentamente todas as questões.
- As 5 primeiras perguntas são de escolha múltipla.
- Existe uma tabela com dados e informações úteis no final do enunciado.
- Todas as respostas devem ser dadas na folha de prova sendo devidamente assinadas.

PERGUNTAS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. [1 ponto] Qual é a constelação do céu noturno a que pertence a estrela mais brilhante do céu de verão no hemisfério norte.

a) Lira

b) Ursa Menor

c) Cão Maior

d) Boieiro

Solução: No céu de verão a estrela mais brilhante é Arcturus da constelação do Boieiro, e por isso a resposta certa é a d)

2. [1 ponto] A estrela mais próxima do sistema solar (próxima Centauri) encontra-se a aproximadamente a...

a) 0.42 anos-luz

b) 4.2 anos-luz

c) 42 anos-luz

d) 420 anos-luz

Solução: b)

3. [1 ponto] Um projéctil é lançado do ponto A a uma grande velocidade numa trajectória paralela à superfície da Terra nesse ponto e na direcção Este, de forma a entrar numa órbita elíptica. Indica o lugar à superfície da Terra sobre o qual o projéctil atinge a altura mais elevada (assume que o atrito da atmosfera é desprezável).

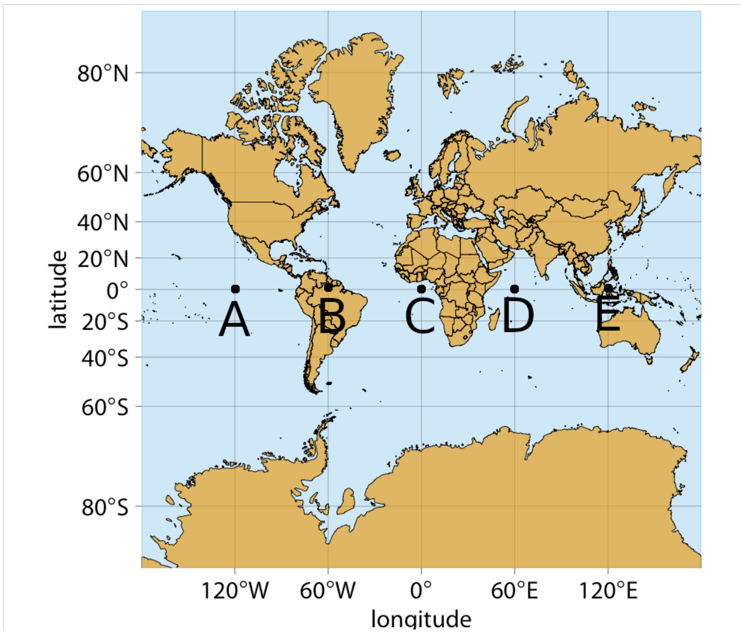

Figura 1: Mapa da superfície terrestre

a) A

b) B

c) C

d) D

e) E

Solução: Como a velocidade de lançamento é perpendicular ao vector posição relativamente ao foco e o projéctil entra em órbita, o ponto de lançamento corresponde ao perigeu, pelo que o apogeu acontecerá sobre o ponto diametralmente oposto na superfície da Terra.
D

4. [1 ponto] O termo "Júpiteres quentes" (em inglês "hot Jupiters") é comummente usado entre os cientistas planetários de todo o mundo. Isto refere-se ao facto de (seleciona a opção correta):

a) planetas como Júpiter formarem-se junto da sua estrela-mãe.

b) existirem erupções vulcânicas frequentes que aquecem a superfície deste tipo de planetas.

c) existirem planetas com um tamanho similiar ao do planeta Júpiter mas a orbitarem muito mais próximo da sua estrela-mãe.

d) estes planetas terem condições para iniciar processos de fusão nuclear e tornarem-se estrelas no futuro.

Solução: c)

5. [1 ponto] A Tabela abaixo apresenta as magnitudes B e V de quatro estrelas. Classifica-as em ordem crescente de temperatura efetiva.

Estrela	B	V
I	0,40	-0,03
II	1,42	1,64
III	1,93	1,93
IV	2,87	1,81

a) I, II, III, IV

b) II, III, I, IV

c) IV, I, III, II

d) IV, III, II, I

Solução: Calculando o índice de cor (B-V) temos

Estrela	B-V
I	0,43
II	-0,22
III	0,00
IV	1,06

Como quanto menor o índice de cor (B-V), maior a temperatura, a ordem crescente de temperaturas é portanto IV, I, III, II. Resposta: alternativa (c)

PERGUNTAS DE RESPOSTA LONGA

6. [3 pontos] O vento solar é um fluxo de partículas carregadas que atinge a órbita da Terra. Ele é maioritariamente constituido por protões, pelo que podes desprezar as outras partículas nas perguntas que se seguem.

a) Estima o fluxo de massa j_m (massa por unidade de área e de tempo), considerando que a densidade observada de protões à distância de 1 UA do Sol é $n_p \simeq 10$ cm^{-3}, com velocidades de $v \simeq 400$ km/s.

b) Qual é o fluxo de partículas j_p correspondente?

c) Estima a taxa de perda de massa do Sol devido ao vento solar em massas solares por ano.

d) Sabendo que o Sol tem uma idade de 4.5 mil milhões de anos e assumindo que toda a massa perdida pelo Sol se deve ao vento solar e que este permaneceu constante durante toda a sua vida, qual seria a massa do Sol no início da sua evolução?

e) Utilizando modelos mais realistas para a evolução do Sol, estima-se que a sua massa inicial era de 1.05 $M_\odot$. Apresenta uma razão para a diferença entre este valor e o valor obtido na alínea anterior.

Solução:

a) $j_m \simeq \rho v \simeq n_p m_H v \simeq 6.7 \times 10^{-15}$ kg.m^{-2}.s^{-1}

b) $j_p \simeq n_p v \simeq 4.0 \times 10^{12}$ m^{-2}.s^{-1}

c) $\dot{M} = 4\pi d^2 j_m \times \simeq 3.0 \times 10^{-14}$ M$_\odot$/ano

d) $\Delta M \simeq \dot{M}\Delta t \simeq (3 \times 10^{-14})(4.5 \times 10^9) \simeq 1.35 \times 10^{-4}$ M$_\odot$
$M_0 = 1 + 1.35 \times 10^{-4} = 1.000135$ M$_\odot$

e) Duas respostas válidas: 1) Parte da massa do Sol é perdida por radiação; 2) O vento solar pode ter sido mais intenso no passado.

7. [3 pontos] A anã branca mais facilmente observável está no sistema triplo 40 Eridani: 40 Eri A é uma estrela de tipo solar de 4a magnitude, 40 Eri B é uma anã branca de 10^a magnitude, e 40 Eri C é uma anã vermelha tipo M5 de 11^a magnitude. 40 Eri B e C estão a cerca de 400 UA da componente mais brilhante.

a) O período orbital do sistema BC é 247,9 anos. A paralaxe medida é de 0,201"e o semieixo maior de 6,89". A razão das distâncias entre B e C para o centro de massa do sistema é a_B/a_C = 0,37. Encontra as massas de B e C (em unidades de massa solar).

b) A magnitude absoluta de 40 Eri B é 9,6. Encontra sua luminosidade (em unidades de luminosidade solar).

c) A temperatura efetiva de 40 Eri B é 16900K. Calcula seu raio (em km).

Solução:

a) Para encontrarmos as massas de B e C, precisaremos resolver simultaneamente as seguintes equações:

A razão a_B/a_C nos dá a razão m_C/m_B

$$\frac{m_C}{m_B} = \frac{a_B}{a_C} = 0,37 \tag{1}$$

Pela Lei de Kepler generalizada temos:

$$m_B + m_C = \frac{4\pi^2}{GP^2}a^3 \tag{2}$$

como $a = \alpha d$, onde α é a extensão angular do semieixo, e d a distância do sistema até nós. Então,

$$a = \left(6,89'' \frac{1^\circ}{3600''}\frac{\pi rad}{180^\circ}\right) \times \left(\frac{1}{0,201''}\frac{206265UA}{pc}1,496 \times 10^{11}\frac{m}{UA}\right) = 5,128 \times 10^{12}m \tag{3}$$

O período P é de 247,9 anos=7,818×10^9s. Substituindo em (2) temos:

$$m_B + m_C = \frac{4\pi^2}{(6,67 \times 10^{-11})(7,818 \times 10^9)^2}\left(5,128 \times 10^{12}\right)^3 = 1,306 \times 10^{30}kg = 0,656M_\odot \tag{4}$$

Resolvendo para as massas individualmente:

$$m_C\text{=0,37}m_B$$

$$m_B + m_C = 1,37m_B = 0,656M_\odot \rightarrow m_B = 0,479M_\odot \rightarrow m_c = 0,177M_\odot \tag{5}$$

b)

$$\begin{gathered} M_B - M_\odot = -2,5log\left(\frac{L_B}{L_\odot}\right) \\ L_B = 10^{\frac{9,6-4,83}{-2,5}} \\ M_B = 0,012L_\odot \end{gathered} \tag{6}$$

c) Da Lei de Stefan-Boltzmann

$$\begin{gathered} L_B = 4\pi R^2\sigma T^4 \\ R = \frac{1}{T^2}\sqrt{\frac{L_B}{4\pi\sigma}} \\ R_B = 8,89 \times 10^3 km \end{gathered} \tag{7}$$

8. [3 pontos] A seguinte expressão descreve a função de massa de um sistema binário:

$$f(M_1, M_2) = \frac{M_2^3 \sin^3(i)}{(M_1 + M_2)^2} \tag{8}$$

em que M_1 é a massa da estrela 1, M_2 é a massa da estrela 2, e i é a inclinação da órbita relativamente à nossa linha de visão.

a) Considera que este é um sistema binário eclipsante com um período de 35 anos e um semi-eixo maior total de 18 UA. Se neste sistema o semi-eixo maior da estrela 1 for duas vezes maior que o semi-eixo maior da estrela 2, estima a função de massa do sistema binário em termos de massas solares.

b) Considera agora que a estrela 1 tem magnitude aparente de $m_1 = 9.8$ e raio $r_1 = 0.4\mathrm{R}_\odot$. Durante um evento de trânsito periódico verificou-se uma diminuição do fluxo da estrela de 0.05%. Se este evento tiver sido causado por um exoplaneta em trânsito em torno da estrela 1, qual é o raio desse exoplaneta em unidades de raios terrestres.

c) Se este binário estiver a uma distância de 30 pc da Terra, qual é o diâmetro (em centímetros) mínimo necessário de um telescópio capaz de o resolver na região do visível (≈ 550 nm).

Solução:

a) Começamos por calcular a massa total do sistema:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{M_{\text{total}}} \Leftrightarrow M_{\text{total}} = \frac{18^3}{35^2} = 4.76\mathrm{M}_\odot \tag{9}$$

E como o semi-eixo maior da estrela 1 é 2 vezes maior que o da estrela 2, temos

$$M_1 + M_2 = M_{\text{total}} \Leftrightarrow \frac{3}{2}M_2 = M_{\text{total}} \Leftrightarrow M_2 = \frac{2}{3} \times 4.76 = 3.17\mathrm{M}_\odot \tag{10}$$

Finalmente, e como o sistema é um binário eclipsante, siginifica que a inclinação é $\approx 90°$, podemos calcular a função de massa

$$f(M_1, M_2) = \frac{3.17^3 \sin(90°)}{4.76^2} = 1.41\mathrm{M}_\odot. \tag{11}$$

b) A profundidade do trânsito é proporcional ao quadrado do rácio dos raios dos dois corpos intervenientes. Assim:

$$\delta = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2 \Leftrightarrow R_p = \sqrt{\delta}R_* = \sqrt{(}0.0005) \times 0.4\mathrm{R}_\odot \approx 0.98R_\oplus \tag{12}$$

c) A uma distância de 30 pc, a sepração angular entre estrelas é

$$\theta = a/d = 18/(30 \times 206265) = 2.9 \times 10^{-6}\text{rad} \approx 0.6'' \tag{13}$$

Para o comprimento de onda do visível ($\lambda = 550$ nm), podemos calcular o poder resolvente do telescópio de diâmetro D através da relação

$$\theta = 1.22\frac{\lambda}{D} \Leftrightarrow D = 1.22\frac{\lambda}{\theta} \approx 0.23\text{m} = 23\text{cm}. \tag{14}$$

9. [3 pontos] O Grupo local, ao qual pertence a nossa galáxia, é constituído por três galáxias principais (a Via Láctea, a galáxia de Andrómeda e a galáxia do Triângulo) e dezenas de outras galáxias mais pequenas. Ao fazer uma observação da galáxia de Andrómeda (a uma distância de ≈800 kpc da Via Láctea) da risca de Oxigénio ionizado ([OII], comprimento de onda em laboratório $\lambda = 3727$Å), esta foi observada no comprimento de onda $\lambda_{\rm obs} = 3725.5$Å.

a) A galáxia de Andrómeda está a aproximar-se ou a afastar-se de nós? Justifica.

b) Calcula a velocidade a que a galáxia de Andrómeda se desloca relativamente à Terra.

c) Usando a velocidade calculada na alínea anterior, estima o tempo (em anos) que a galáxia de Andrómeda demoraria a percorrer o equivalente à distância a que se encontra de nós.

d) Considerando que galáxias como a Via Láctea e Andrómeda podem interagir entre si, diz, justificando, qual a morfologia resultante da fusão das duas galáxias.

Solução:

a) Como o comprimento de onda observado é mais pequeno que o comprimento de onda em laboratório (a risca está "blueshifted"), isso significa que a galáxia se está a aproximar.

b) $\Delta\lambda/\lambda = v/c \Leftrightarrow v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}c = \frac{1.5}{3727} \times 3 \times 10^5$ km/s = 120.7 km/s

c) Assumindo uma velocidade constante, $t = d/v = 6.5 \times 10^9$, que são 6.5 mil milhões de anos.

d) A reposta certa pode ser uma de duas, sendo a primeira opção a mais correta. Podemos aceitar a segunda caso a justificação faça a contextualização correta.

Resposta 1) Elíptica, porque as interações gravíticas entre os dois discos alteram as órbitas das estrelas para movimentos mais aleatórios, perdendo-se a rotação regular característica de um disco.

Resposta 2) Espiral com bojo, porque apesar das órbitas tornarem-se menos regulares, no caso particular de existir gás em abundância pode ser formado um novo disco espiral após a fusão a partir desse gás.

10. [3 pontos] De acordo com a teoria da Relatividade Geral, um corpo massivo consegue alterar a trajectória de um raio de luz que passe perto dele. O ângulo de deflecção da luz é apróximadamente dado por

$$\theta = \frac{4GM}{c^2 r} \tag{15}$$

onde M é a massa do corpo central e r o parâmetro de impacto do raio de luz (vê a figura abaixo). Um corpo massivo funciona portanto como uma lente capaz de focar luz a uma distância f do centro do corpo. Nas seguintes alíneas utiliza a aproximação $\tan\theta \approx \theta$.

a) Considera que o corpo massivo em questão é o Sol. Qual a menor distância do centro do Sol para a qual é possível focar raios de luz? Apresenta o resultado em unidades astronómicas. Como se compara o valor com a distância da Heliopausa ao Sol (100 UA)?

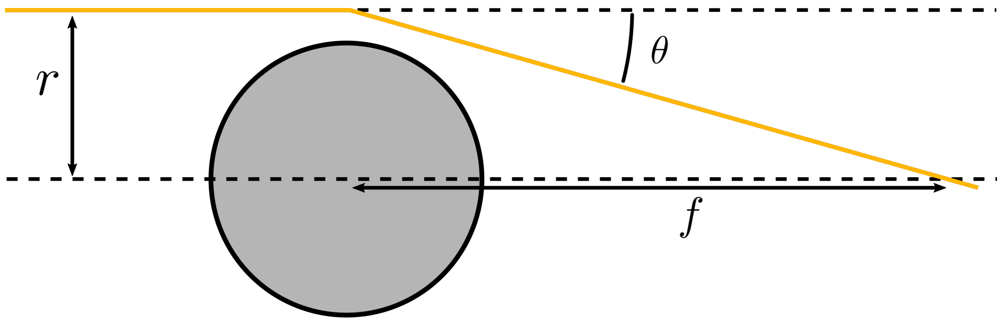

Figura 2: Esquema da deflexão da luz por um corpo massivo

b) Se em vez do Sol, considerármos um buraco negro com a mesma massa, qual será esta distância? Apresenta o teu resultado em quilómetos. A aproximação do ângulo continua a ser válida?

c) Considera agora que em vez de um corpo massivo temos uma distribuição esféricamente simétrica de massa através da qual a luz consegue passar enquanto é deflectida (um halo de matéria negra por exemplo). Qual deverá ser a distribuiçao de massa $M(r)$ para que a luz seja focada num único ponto?

d) Dentro de um halo de matéria negra com a distribuição de matéria $M(r)$ que obtiveste na alínea anterior a lei de Kepler para órbitas circulares não será mais válida. Como se relaciona neste caso o período de translação T e o raio orbital R? (Se não conseguiste resolver o exercício anterior assume que $M(r) = \alpha r^2$ em que α é uma constante.)

Solução:

a) A distância a que a luz é focada é dada por

$$\tan\theta = \frac{r}{f} \longrightarrow f = \frac{r}{\tan\theta} \approx \frac{r}{\theta} = \frac{r^2c^2}{4GM} \tag{16}$$

A menor distância possível corresponde ao caso em que os raios de luz passam rasantes à superfície do sol e $r = R_\odot$. Substituindo valores numéricos, obtemos que a distância mínima é de

$$f_{min} = 8.2 \times 10^{10} \text{ km} = 546 \text{ UA} \tag{17}$$

b) Um buraco negro com a massa do sol terá um raio dado pelo raio de schwarchild

$$R_{\text{Schwarzchild}} = \frac{2GM}{c^2} = 3 \text{ km} \tag{18}$$

Substituindo na expressão encontrada na alínea anterior temos

$$f_{min} = 1.47 \text{ km} \tag{19}$$

A validade da aproximação requer que a distância focal seja muito maior que o parâmetro de impacto do raio de luz pelo que neste último caso não podemos utilizar a expressão.

c) Para que todos os raios sejam focados no mesmo ponto, teremos de ter que f é independente do parâmetro de impacto. Para tal, $M(r)$ terá de se comportar como

$$f = \frac{r^2c^2}{4GM(r)} \longrightarrow M(r) = \frac{c^2r^2}{4Gf} \tag{20}$$

d) A lei de kepler será neste caso dada por

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM(R)} R^3 = \frac{4\pi^2}{G\alpha R^2} R^3 = \frac{4\pi^2}{G\alpha} R \tag{21}$$

O valor de α obtido da alínea anterior é $\alpha = c^2/(4Gf)$ pelo que a resposta final será

$$T^2 = \frac{16\pi^2 f}{c^2} R \tag{22}$$

Tabela de Dados:

Constantes Universais

- Velocidade da luz (vazio): $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- Constante gravitacional: $G = 6.673 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
- Constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^2\,K^{-4}}$
- Constante de dispersão de Wien: $b = 2.8976 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$
- massa de um protão: $m_p = 1.6726 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Dados sobre o Sol

- Massa do Sol: $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- Raio do Sol: $R_\odot = 6.955 \times 10^8\,\mathrm{m}$
- Período médio de rotação do sol: $T = 27$ dias
- Luminosidade do Sol: $L_\odot = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$
- Magnitude Absoluta Visual do Sol: $M_\odot = +4.83$ mag
- Temperatura superficial do Sol: $T_{\mathrm{ef}} = 5780\,\mathrm{K}$

Dados sobre a Terra

- Massa da Terra: $M_\oplus = 5.972 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- Raio da Terra: $R_\oplus = 6371 \times 10^3\,\mathrm{m}$

Dados sobre a Lua

- Massa da Lua: $M_☾ = 7.348 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}$
- Raio da Lua: $R_☾ = 1738 \times 10^3\,\mathrm{m}$

Conversão de unidades

- Unidade Astronómica (UA): $1\,\mathrm{UA} = 1.49 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
- Parsec (pc): $1\,\mathrm{pc} = 3.086 \times 10^{16}\,\mathrm{m}$
- Ano-luz (ly): $1\,\mathrm{ly} = 9.46 \times 10^{15}\,\mathrm{m}$

Relações importantes

- Velocidade angular $\Omega = \dfrac{2\pi}{T}[\mathrm{rad\,s^{-1}}]$
- Lei de Stefan-Boltzmann: $L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$
- Distância em parsec: $d_{pc} = 10^{\frac{m-M+5}{5}}$
- Magnitude absoluta: $M = -2,5\log(L) + K$, em que K é uma constante

- Lei da Gravitação Universal: $F_g = G\dfrac{Mm}{r^2}$
- Lei de Wien: $\lambda_{max} = \dfrac{b}{T}$
- Lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$