16as Olimpíadas Nacionais de Astronomia

Prova de Análise de Dados da Final Nacional

3 de Junho de 2022
15:00
Duração máxima – 60 minutos

Notas:

- Leia atentamente todas as questões.

---

1. [10 pontos] Em 1618, tendo como base os registos recolhidos ao longo de uma vida por Tycho Brahe, Johannes Kepler conseguiria finalmente explicar os movimentos dos planetas conhecidos à época (até Saturno) ao demonstrar a proporcionalidade entre o quadrado do período de translação e o cubo do raio da órbita do planeta. Hoje, esse conhecimento foi muito alargado servindo para o estudo de todos os movimentos orbitais, desde os satélites que orbitam a Terra até à análise das órbitas de planetas extrassolares que permite a determinação da massa dessas estrelas. Na tabela abaixo apresentam-se alguns dados importantes para a definição do movimento orbital de planetas em torno do Sol.

Planeta	$r_{órbita}(m)$	$r^3_{órbita}(m^3)$	$T_{translação}(s)$	$T^2_{translação}(s^2)$
Mercúrio	$5,79 \times 10^{10}$	$1,94 \times 10^{32}$	$7,60 \times 10^{6}$	$5,78 \times 10^{13}$
Vénus	$1,08 \times 10^{11}$	$1,26 \times 10^{33}$	$1,94 \times 10^{7}$	$3,77 \times 10^{14}$
Terra	$1,50 \times 10^{11}$	$3,38 \times 10^{33}$	$3,15 \times 10^{7}$	$9,96 \times 10^{14}$
Marte	$2,28 \times 10^{11}$	$1,19 \times 10^{34}$	$5,94 \times 10^{7}$	$3,52 \times 10^{15}$
Júpiter	$7,79 \times 10^{11}$	$4,71 \times 10^{35}$	$3,74 \times 10^{8}$	$1,40 \times 10^{17}$
Saturno	$1,43 \times 10^{12}$	$2,92 \times 10^{36}$	$9,30 \times 10^{8}$	$8,64 \times 10^{17}$

a) Calcula a velocidade orbital da Terra em torno do Sol.

b) A partir da Lei da Gravitação Universal e da 3ª Lei de Newton demonstra que o quadrado do período de translação é proporcional ao cubo do raio da órbita do planeta através da expressão:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} r^3$$

c) Usando os dados da tabela, traça um gráfico e a respectiva recta de ajuste que te permita determinar a massa do Sol.

Na resposta:

- apresenta a equação da reta de ajuste ao gráfico adequado, explicando como se obtém a massa do Sol a partir dos resultados do gráfico;

- calcula o valor solicitado com dois algarismos significativos, a partir da equação da reta de ajuste.

Solução:

a)

$$v = \frac{2\pi}{T} r \Leftrightarrow v = \frac{2\pi}{3,15 \times 10^7} \times 1,50 \times 10^{11} \Leftrightarrow v = 2,99 \times 10^4 ms^{-1}$$

b) Sabemos que $F_c = F_g \Leftrightarrow m\frac{v^2}{r} = G\frac{m_S m}{r^2} \Leftrightarrow v^2 = G\frac{m_S}{r}$ Substituindo a velocidade linear por $v = \frac{2\pi}{T}r$, tem-se

$$\left(\frac{2\pi}{T} r\right)^2 = G\frac{m_S}{r}$$

o que rearranjando dá

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_S} r^3$$

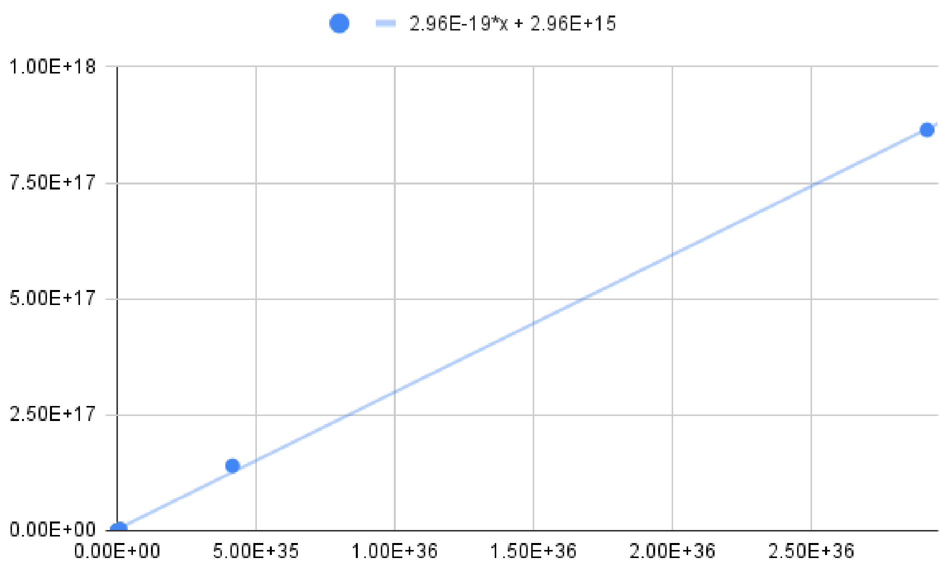
O quadrado do período de translação, T^2, é, deste modo, proporcional ao cubo do raio da órbita do planeta, r^3, como queríamos demonstrar.

c) Realizando uma regressão linear com os dados tabela a equação da reta de ajuste ao gráfico de T^2 em função de r^3, em que $declive = \frac{4\pi^2}{Gm_S}$, ficamos com

$y = ax + b$

$a = 2,9588 \times 10^{-19}$

$b = -3,746 \times 10^{14}$



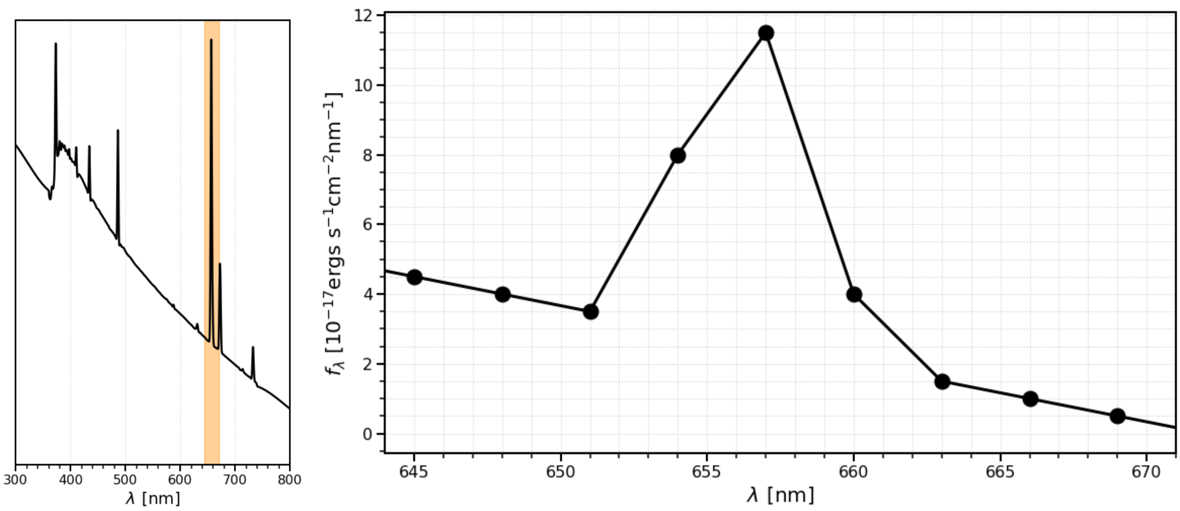
Ao traçar o gráfico, verifica-se que a exactidão deste ajuste está praticamente dependente da precisão com que se traça o ponto de Júpiter. A cotação total deve ser dada a respostas entre 1.90 e 2.1 $\times 10^{30}$ kg. (Se usarem 5 quadrados grandes do papel milimétrico para representar o eixo do quadrado do período de 0 a 10^{18}, esta margem corresponde aproximadamente a um erro de 3 quadrados pequenos na definição da posição de Júpiter. Idealmente, deve ser usada a maior área possível do papel quadriculado, pelo que a tolerância nesse caso ainda será maior).

Assim, com o significado físico do declive pode calcular-se a massa do Sol já que $2,96 \times 10^{-19} = \frac{4\pi^2}{G m_S}$

O que rearranjando vem

$$m_S = \frac{4\pi^2}{2,96 \times 10^{-19} G} \Leftrightarrow m_S = \frac{4\pi^2}{2,96 \times 10^{-19} \times 6,67 \times 10^{-11}} = 2,00 \times 10^{30} kg$$

2. [10 pontos] Na figura abaixo podes encontrar os dados obtidos com um espectrógrafo para uma galáxia próxima de nós, já corrigido para o referencial de repouso. No painel da direita mostra-se uma região especial (destacada a laranja no painel da esquerda) em torno da risca de emissão de Hα ($\lambda_{\mathrm{rest}} \approx 656$ nm) que corresponde à emissão de um fotão após a transição do electrão do nível 2 para o nível 1 num átomo de hidrogénio. A curva apresentada é composta por duas componentes: a emissão do contínuo que vem da composição de múltiplos espectros de corpo negro das estrelas que pertencem a esta galáxia e a emissão no comprimento de onda de Hα que corresponde a emissão de moléculas de hidrogénio do gás nebular em torno das regiões de formação estelar.



a) Estima o valor do contínuo correspondente ao comprimento de onda do pico da emissão. Assume que o contínuo é localmente bem descrito por uma reta.

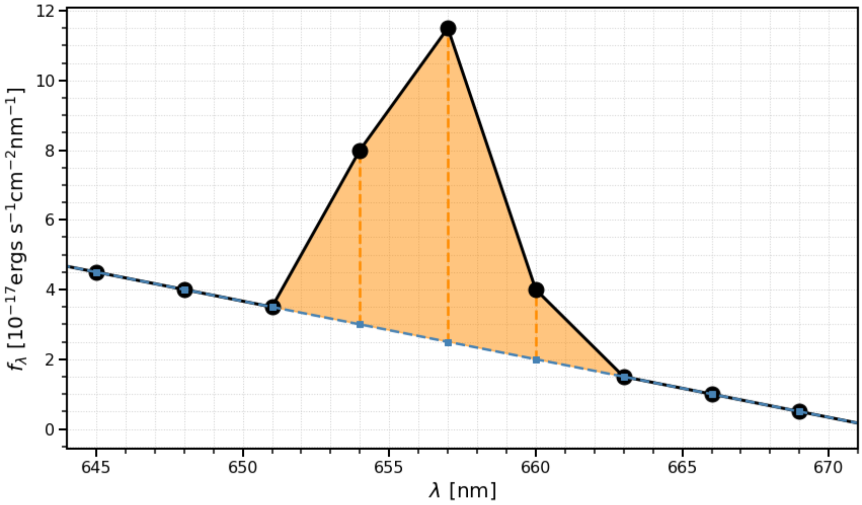
b) Calcula o fluxo total de emissão da risca. Nota que o fluxo da risca de emissão corresponde à área entre a curva observada e a extrapolação do contínuo nessa região.

c) Imagina que se quer observar a mesma região do espectro mas para uma galáxia distante a redshift de $z = 2$. Qual a zona do espectro electromagnético que teria de ser usada para obter tal observação?

Solução:

a) O pico da emissão é observado nos 657 nm. O contínuo é descrito por uma reta que decresce 0.5 em fluxo por cada 3 nm de aumento no comprimento de onda. Extrapolando para o valor central obtemos que o contínuo tem um fluxo de 2.5×10^{-17} ergs/s/cm^2/nm.

b) A solução consiste em calcular a área das quatro regiões indicadas a laranja na figura abaixo usando a fórmula para a área de um trapézio. O valor obtido será de 48×10^{-17} ergs/s/cm^2.



c) Para z a risca é observada a $\lambda = 656 \times (1 + z) = 656 \times 3 = 1968$ nm ≈ 2 μm. Este comprimento de onda corresponde à região do infravermelho próximo.

Tabela de Dados:

Constantes Universais

- Velocidade da luz (vazio): $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- Constante gravitacional: $G = 6.673 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
- Constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^2\,K^{-4}}$
- Constante de dispersão de Wien: $b = 2.8976 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$
- massa de um protão: $m_p = 1.6726 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Dados sobre o Sol

- Massa do Sol: $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- Raio do Sol: $R_\odot = 6.955 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$
- Período médio de rotação do sol: $T = 27$ dias
- Luminosidade do Sol: $L_\odot = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$
- Magnitude Absoluta Visual do Sol: $M_\odot = +4.83$ mag
- Temperatura superficial do Sol: $T_{\mathrm{ef}} = 5780\,\mathrm{K}$

Dados sobre a Terra

- Massa da Terra: $M_\oplus = 5.972 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- Raio da Terra: $R_\oplus = 6371 \times 10^{3}\,\mathrm{m}$

Dados sobre a Lua

- Massa da Lua: $M_☾ = 7.348 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}$
- Raio da Lua: $R_☾ = 1738 \times 10^{3}\,\mathrm{m}$

Conversão de unidades

- Unidade Astronómica (UA): $1\,\mathrm{UA} = 1.49 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
- Parsec (pc): $1\,\mathrm{pc} = 3.086 \times 10^{16}\,\mathrm{m}$
- Ano-luz (ly): $1\,\mathrm{ly} = 9.46 \times 10^{15}\,\mathrm{m}$

Relações importantes

- Velocidade angular $\Omega = \dfrac{2\pi}{T}[\mathrm{rad\,s^{-1}}]$
- Lei de Stefan-Boltzmann: $L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$
- Distância em parsec: $d_{pc} = 10^{\frac{m-M+5}{5}}$
- Magnitude absoluta: $M = -2,5\log(L) + K$, em que K é uma constante

- Lei da Gravitação Universal: $F_g = G\dfrac{Mm}{r^2}$
- Lei de Wien: $\lambda_{max} = \dfrac{b}{T}$
- Lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$