15ª
Olimpíadas Nacionais de Astronomia

Prova Teórica da Final Nacional

25 de Junho de 2021
10:30 (Continente e Madeira) / 09:30 (Açores)
Duração máxima – 120 minutos

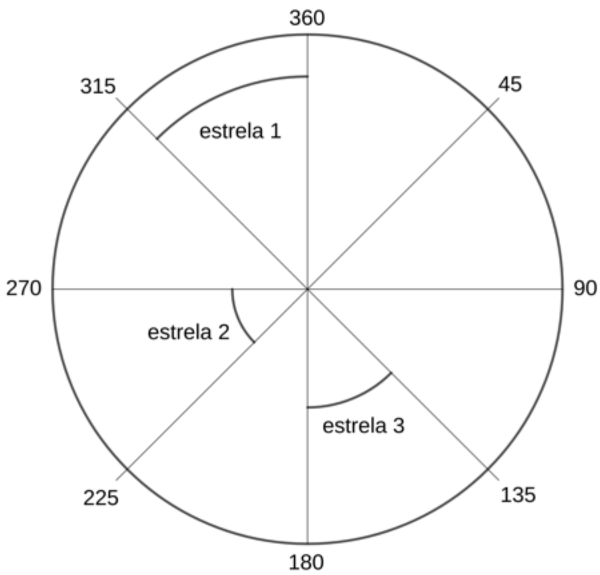
SOCIEDADE PORTUGUESA ASTRONOMIA

Notas:

- Leia atentamente todas as questões.
- As 6 primeiras perguntas são de escolha múltipla.
- Existe uma tabela com dados e informações úteis no final do enunciado.
- Todas as respostas devem ser dadas na folha de prova sendo devidamente assinadas.

PERGUNTAS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Um astrónomo apontou uma câmara directamente para o pólo Sul celeste e obteve uma imagem de longa exposição. No diagrama seguinte, estão representados os traços de algumas estrelas observadas nessa imagem.



Com base no diagrama, qual foi a duração da exposição?

a) 3 horas

b) 4 horas

c) 1 hora

d) 6 horas

Solução: Solução: a)

2. Saturno é o planeta do sistema solar com o maior número de satélites naturais. Qual o número de luas deste planeta?

a) 62

b) 68

c) 79

d) 82

Solução: d)

3. Que nome se dá ao conjunto próximo de galáxias do qual faz parte a Via Láctea?

a) Grupo Local

b) Enxame Local

c) Enxame da Virgem

d) Grupo da Virgem

Solução: a)

4. 61 Cygni B é um estrela do tipo espetral K7 V com uma temperatura efetiva de ~4,000 K enquanto que BI 253 é uma estrela do tipo espetral O2 V-III com uma temperatura efetiva de ~50,000 K. Se 61 Cygni B tivesse o mesmo tamanho que BI 253, qual das afirmações seguintes não seria verdadeira?

a) BI 253 é mais luminosa que 61 Cygni B.

b) 61 Cygni B emite mais radiação no infravermelho do que no ultravioleta.

c) BI 253 emite mais radiação no ultravioleta do que no infravermelho.

d) 61 Cygni B emite mais radiação no infravermelho do que BI 253.

Solução: Solução d)

5. Relativamente a manchas solares, qual das seguintes afirmações é falsa?

a) São regiões de fortes campos magnéticos.

b) A temperatura na superfície da manhca é inferior à temperatura na maioria da superfície do Sol.

c) A sua cor escura resulta de uma composição química local distinta do resto da superfície do Sol.

d) Elas tendem a ocorrer na mesma altura que fenómenos de actividade solar como proeminências ou erupções solares.

Solução: Solução: c)

6. TOI-1789b é um exoplaneta descoberto em 2021 com um raio de 1,4 raios de Júpiter. Este exoplaneta orbita a estrela TYC 1962-00303-1 cujo o raio é 2,2 vezes maior que o do Sol. Em percentagem, qual é a profundidade do trânsito de TOI-1789b? (Assume que o raio de Júpiter é $R_J = 69911$ km)

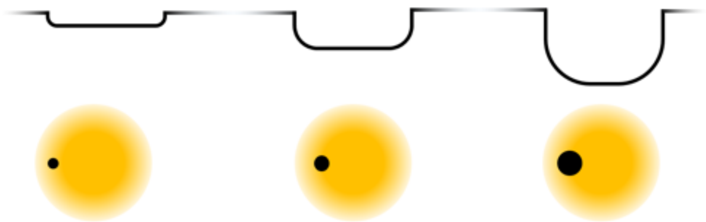


Figura 1: Exemplos da variação do brilho de uma estrela devido ao trânsito de um planeta.

a) 0,4%

b) 2,4%

c) 4,4%

d) 6,4%

Solução: Solução a)

PERGUNTAS DE RESPOSTA LONGA

7. Em Astronomia, o período sinódico de um corpo é o tempo entre dois alinhamentos sucessivos da Terra e desse mesmo corpo em relação ao Sol. Nas seguintes alíneas vamos assumir que todos os corpos orbitam o Sol em órbitas circulares e no mesmo plano. Vamos então considerar um corpo hipotético com uma órbita exterior à da Terra.

a) Denotando por T_T o período orbital da Terra e T_c o período orbital do corpo, mostra que o período entre dois alinhamentos sucessivos (o período sinódico) T_s pode ser obtido da expressão:

$$\frac{1}{T_s} = \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_c} \tag{1}$$

b) A expressão que derivaste acima é válida para planetas com órbitas interiores às da Terra? Justifica a tua resposta.

c) Se o período orbital do corpo for igual ao sinódico, qual será esse valor em anos?

d) No sistema solar não existe nenhum corpo como o que consideramos na alínea c), mas Marte não está longe. Marte tem um período de 687 dias. Qual é o período sinódico de Marte?

e) Sabendo apenas que 105 dias depois da oposição de Marte, este tem uma elongação de 90°, qual é a distância de Marte ao Sol em unidades astronómicas?

Solução:

a) Tendo os planetas órbitas circulares, temos que:

$$\theta_{Terra} = \omega_{Terra} t \qquad \theta_{corpo} = \omega_{corpo} t \tag{2}$$

onde ω é a velocidade angular dos dois astros e definiu a direcção de referência tal que em $t = 0$ ambos os corpos estavam alinhados. O Terra, estando numa órbita de raio mais pequeno terá uma velocidade angular mais rápida pelo que completará uma volta mais rapidamente que o corpo exterior. Assim, para que os corpos voltem a estar alinhados, temos de ter que:

$$\theta_{Terra} = 2\pi + \theta_{corpo} \tag{3}$$

Utilizando as expressões acima e a definição de velocidade angular $\omega = 2\pi/T$, obtemos a expressão desejada:

b) A expressão é válida se substituirmos T_c por T_T - ou seja, se considerarmos a terra como o planeta exterior.

c) Como $T_s = T_c$, podemos substituir na equação da alínea a)

$$\frac{1}{T_s} = \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_s} \Leftrightarrow T_s = 2T_T \tag{4}$$

Esse valor será de 2 anos.

d) Substituindo na expressão obtida os valores temos:

$$\frac{1}{T_s} = \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_c} = \frac{1}{365} - \frac{1}{687} \approx \frac{1}{779} \tag{5}$$

pelo que o período sinódico é de aproximadamente 779 dias

e) Começando por fazer um diagrama temos o que está esquematizado na figura 2. No intervalo de tempo $\Delta t = 105$dias, a terra e marte moveram-se uma distância angular (vista do sol) $\theta_T = \omega_T \Delta t$ e $\theta_M = \omega_M \Delta t$ respectivamente. A distância angular entre os dois planetas é então

$$\theta = (\omega_T - \omega_M)\Delta t = 2\pi \left(\frac{\Delta t}{T_s}\right) = 2\pi \left(\frac{105}{779}\right) = 0.847 \text{ (rad)} = 48.9^\circ \tag{6}$$

Por termos então um triângulo rectângulo, vemos que:

$$\cos\theta = \frac{R_T}{R_M} \Rightarrow R_M = 1.511 R_T \tag{7}$$

concluindo então que a distância de marte ao sol e de 1.51 Unidades Astronómicas.

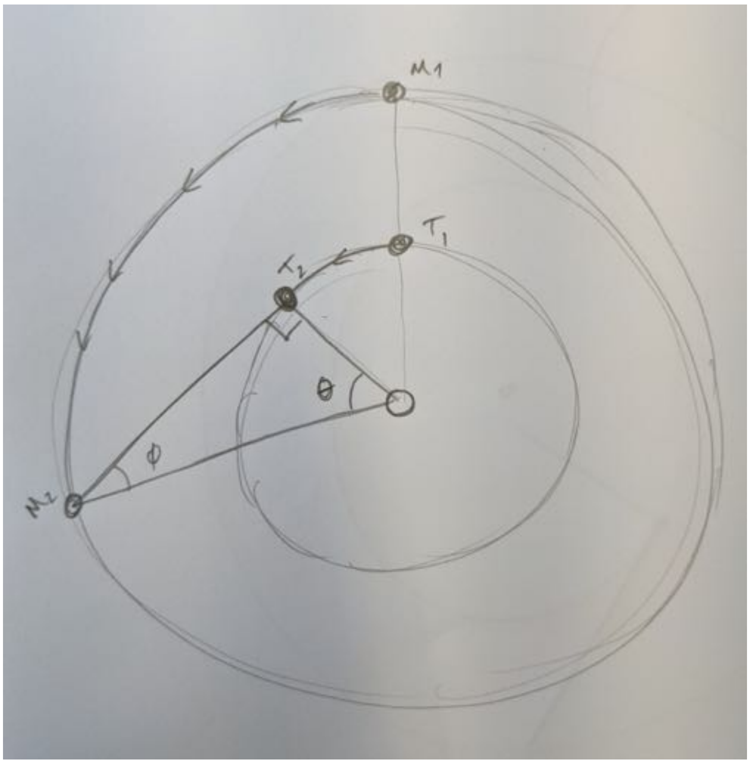


Figura 2: Posição relativa da terra e marte 105 dias depois da oposição

8. Em 1933, Fritz Zwicky estudou em detalhe o aglomerado de galáxias conhecido como Aglomerado de Coma e calculou a sua massa de duas maneiras diferentes. Neste exercício vamos tentar seguir as passadas dele.

a) Considera dois corpos de massas idênticas m que orbitam em torno do centro de massa comum em órbitas circulares de raio R. Mostra que a velocidade orbital de cada corpo é dada por:

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{Gm}{4R}} \tag{8}$$

b) Escreve a expressão para a energia cinética, potencial e total do sistema e mostra que

$$2E_{kin} + E_{pot} = 0 \tag{9}$$

A expressão acima continua a ser aplicável quando temos um sistema de N corpos em equilíbrio. Vamos então tentar aplicar a expressão acima a um enxame de galáxias.

c) Considera um aglomerado composto por N galáxias semelhantes de massa m (cada uma) e que estas se encontram uniformemente distribuidas numa esfera de raio R. Para um corpo no limite do aglomerado, mostra que a velocidade de escape é dada por:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GNm}{R}} \tag{10}$$

d) Sabendo que a energia potential média do sistema de N galáxias é dada por:

$$\tilde{E}_{pot} = -\frac{N^2}{2}\frac{Gm^2}{2R} \tag{11}$$

mostra que a velocidade média de cada galáxia é dada por:

$$v_{med}^2 = \frac{N}{2}\frac{Gm}{R} \tag{12}$$

e) Zwicky, observando o aglomerado de Coma, viu que este era composto por aproximadamente 800 galáxias com uma massa média de $m = 10^9\,\mathrm{M_\odot}$. Com estes dados consegues calcular fácilmente a massa do aglomerado, mas a expressão derivada na última alínea permite-te descobrir a massa de uma outra maneira. Sabendo que $v_{med} = 3000\,\mathrm{kms^{-1}}$ e $R = 0.3\,\mathrm{Mpc}$, calcula essa massa. Como se compara com a obtida visualmente? Como explicas o resultado?

Solução:

a) A força gravítiva sentida por cada corpo é dada por:

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{d^2} = \frac{Gm^2}{4R^2} \tag{13}$$

Para que os corpos estejam em órbitas circulares, este valor terá de ser igual ao valor da força centrífuga pelo que temos:

$$\frac{Gm^2}{4R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Gm}{4R}} \tag{14}$$

b) A Energia cinética total do sistema será igual à soma da energia cinética dos dois corpos. Como ambos têm a mesma massa e velocidade temos:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = mv^2 = \frac{Gm^2}{4R} \tag{15}$$

A energia potential é simplesmente dada por:

$$E_{pot} = -\frac{Gm_1m_2}{d} = -\frac{Gm^2}{2R} \tag{16}$$

Somando as duas temos a energia total do sistema:

$$E_{tot} = \frac{Gm^2}{4R} - \frac{Gm^2}{2R} = -\frac{Gm^2}{4R} \tag{17}$$

Utilizando as mesmas expressões é fácil verificar que a expressão:

$$2E_{kin} + E_{pot} = 0 \tag{18}$$

é satisfeita.

c) Como as galáxias estão distribuidas uniformemente numa esfera de raio R, a energia total de um corpo de massa m_1 a uma distância $d > R$ do centro da esfera é dada por:

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}m_1 v^2 - \frac{GMm_1}{d} \tag{19}$$

Onde $M = Nm$ é a massa total contida na esfera. A velocidade de escape é a velocidade que o corpo terá de ter no limite da esfera para que chegue ao infinito ($R \to \infty$) com velocidade nula. Isto é equivalente a que o corpo tenha energia total nula:

$$E_{tot} = 0 \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GNm}{R}} \tag{20}$$

d) Utilizando a expressão derivada acima, temos a seguinte igualdade:

$$2\tilde{E}_{kin} + \tilde{E}_{pot} = \frac{1}{2}Nmv_{med}^2 - \frac{N^2}{2}\frac{Gm^2}{2R} = 0 \tag{21}$$

Implicando que:

$$v_{med}^2 = \frac{N}{2}\frac{Gm}{R} \tag{22}$$

e) Em unidades SI, temos as seguintes quantidades:

$$v_{med} = 3000\,\mathrm{kms}^{-1} = 3 \times 10^6\,\mathrm{ms}^{-1} \tag{23}$$

$$R = 0.3\,\mathrm{Mpc} = 1 \times 10^{22}\,\mathrm{m} \tag{24}$$

$$m = 10^9\,\mathrm{M}_\odot = 2 \times 10^{39}\,\mathrm{kg} \tag{25}$$

Utilizando a expressão para a velocidade média temos:

$$(Nm) = \frac{2Rv_{med}^2}{G} = \frac{2\,(1 \times 10^{22}\,\mathrm{m})\,(3 \times 10^6\,\mathrm{ms}^{-1})^2}{(6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2})} = 2.69 \times 10^{45}\,\mathrm{kg} \tag{26}$$

O rácio entre a massa obtidada por este método e a medida visualmente é:

$$\frac{(Nm)_{inferida}}{(Nm)_{visual}} = \frac{2.69 \times 10^{45}\,\mathrm{kg}}{1.6 \times 10^{42}\,\mathrm{kg}} \approx 10^3 \tag{27}$$

Existe uma diferença de 3 ordens de magnitude entre os dois cálculos. Para que o sistema de galáxias esteja em equilíbrio, a massa total do enxame terá de ser 1000 vezes maior que a que conseguimos observar visualmente, de onde podemos postular que grande parte da massa neste sistema não é visivel.

9. A Figura abaixo mostra o espectro de uma galáxia na região da luz visível. No extremo azul, em destaque à direita, é possível identificar duas riscas de absorção intensas, conhecidas como dupleto do cálcio ionizado. Em laboratório, essas transições são observadas nos comprimentos de onda de 3934 Å e 3969 Å.

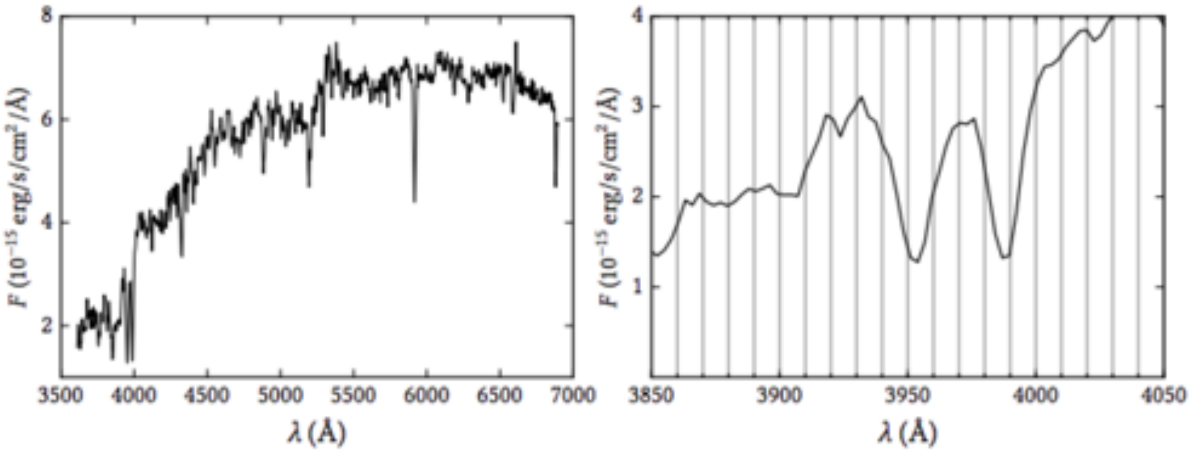


Figura 3: Espectro da Galáxia

a) Determina os comprimentos de onda, em Å, das transições do dupleto observadas no espectro da galáxia.

b) Utiliza os valores obtidos na alínea anterior para calcular o redshift z médio da galáxia.

c) Calcula sua velocidade de afastamento em km/s.

d) Determina sua distância em Mpc. Usa H_0 = 72 km/s/Mpc.

e) Calcula a luminosidade da galáxia, em unidades solares, sabendo que sua magnitude aparente no filtro V é m_V=12. Usa $M_{V\odot}$ = +4,83.

f) Se esta galáxia tiver aproximadamente o mesmo tamanho da Via Láctea (30 kpc de diâmetro), calcula o seu diâmetro angular como visto no céu da Terra, em minutos de arco.

Solução:

a) Medindo-se as duas riscas no gráfico chegamos aos valores: 3953 Å e 3988 Å.

b) O redshift z é dado por
$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \tag{28}$$
Calculando-se os valores de z para as duas riscas temos z_1= 4.83×10^{-3} e z_2=4.76×10^{-3} Portanto, o redshift médio é z=4.80×10^{-3}

c) A velocidade de recessão é calculada por
$$z = \frac{v}{c} \tag{29}$$
Aplicando-se o valor de z obtido no item anterior chega-se a $v = 1.44 \times 10^3$ km/s

d) Aplicando-se a Lei de Hubble:
$$v = H_0 D \tag{30}$$
obtém-se $D = 20,0 Mpc$

e) Primeiro calcula-se a magnitude absoluta da galáxia:

$$m - M = 5 \log d - 5 \tag{31}$$

obtendo-se M=-19,5.
Em seguida, calcula-se a luminosidade pela relação:

$$M - M_{\odot} = -2.5 \log \frac{L}{L_{\odot}} \tag{32}$$

Portanto, $L = 5.4 \times 10^{9}\,\mathrm{L}_{\odot}$

f) O diâmetro angular é obtido dividindo-se o diâmetro físico pela distância:

$$\theta = \frac{30kpc}{20Mpc} = 1.50 \times 10^{-3} rad = 5.16'. \tag{33}$$

10. A Luminosidade de Eddington é a luminosidade máxima que um objecto astronómico pode atingir, mantendo um equilíbrio de forças entre a radiação e a gravidade. Ultrapassado este limite, a pressão da radiação é tão forte que grandes quantidades de matéria começam a ser expelidos da superfície do objecto.

De forma a derivarmos a expressão para a Luminosidade de Eddington, vamos considerar uma estrela como uma nuvem esférica de raio R, opacidade k, composta por partículas com massa m.

a) Mostra que a pressão da radiação à superfície da estrela é

$$P_{\text{rad}} = \frac{L}{4\pi R^2 c} \tag{34}$$

(Sugestão: começa por arranjar uma expressão para o momento de um fotão e considera o que acontece se a energia desse fotão for absorvida por partículas à superfície da estrela)

b) Sabendo que a força da radiação aplicada numa partícula de massa m é dada por

$$F_{\text{rad}} = mP_{\text{rad}}k \tag{35}$$

mostra que a expressão para a Luminosidade de Eddington é

$$L = \frac{4\pi GMc}{k} \tag{36}$$

c) Considera os 3 objectos/eventos astronómicos seguintes:

- uma estrela gigante do tipo AGB (por exemplo, a estrela Mira)
- o Sol
- uma explosão de raios-gamma

Os 3 têm luminosidades (em unidades de luminosidade de Eddington) de:

(i) $3 \times 10^{-5}\ L_{\text{Edd}}$
(ii) $0.2\ L_{\text{Edd}}$
(iii) $10^{12}\ L_{\text{Edd}}$

(não está necessariamente na mesma ordem).

Associa cada um dos 3 objectos/eventos à respectiva luminosidade, justificando a resposta.

Solução:

a) O momento de um fotão é dado por

$$p = \frac{E_f}{c}$$

A força provocada pela absorção do fotão à superfície da estrela pode ser dada por

$$F_f = \frac{p}{\Delta t} = \frac{E_f}{c\Delta t}$$

Sabendo que $L = \dfrac{E}{\Delta t}$, podemos aplicar a expressão anterior a todos os fotões que atingem a superfície da estrela e obtemos

$$F_{\text{rad}} = \frac{L}{c}$$

Assim, para obtermos a pressão, dividimos a força total pela área à superfície e obtemos a pressão radiativa

$$P_{\text{rad}} = \frac{L}{4\pi R^2 c}$$

b) No limite de Eddington,

$$F_{\text{rad}} = F_g \Leftrightarrow \frac{GMm}{R^2} = \frac{Lkm}{4\pi R^2 c}$$

daqui vem

$$L = \frac{4\pi GMc}{k}$$

c) Sol - i

Mira - ii

explosão de raios-gamma - iii

O sol é um objecto com uma estabilidade que se prolonga durante muito tempo, logo está bem abaixo do limite de eddington. Estrelas como a Mira são muito mais luminosas do que o Sol e passam por pulsações e instabilidade que as levam a aproximar-se do limite de Eddington. Fenómenos como explosões de raios-gamma são dos mais luminosos no Universo e resultam precisamente de se ultrapassar largamente o limite de Eddington.

Tabela de Dados:

Constantes Universais

- Velocidade da luz (vazio): $c = 3 \times 10^8 \, \mathrm{m\,s^{-1}}$
- Constante gravitacional: $G = 6.673 \times 10^{-11} \, \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
- Constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \, \mathrm{W\,m^2\,K^{-4}}$
- Constante de dispersão de Wien: $b = 2.8976 \times 10^{-3} \, \mathrm{m\,K}$

Dados sobre o Sol

- Massa do Sol: $M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \, \mathrm{kg}$
- Raio do Sol: $R_\odot = 6.955 \times 10^8 \, \mathrm{m}$
- Período médio de rotação do sol: $T = 27$ dias
- Luminosidade do Sol: $L_\odot = 3.846 \times 10^{26} \, \mathrm{W}$
- Temperatura superficial do Sol: $T_{\mathrm{ef}} = 5780 \, \mathrm{K}$

Dados sobre a Terra

- Massa da Terra: $M_\oplus = 5.972 \times 10^{24} \, \mathrm{kg}$
- Raio da Terra: $R_\oplus = 6371 \times 10^3 \, \mathrm{m}$

Dados sobre a Lua

- Massa da Lua: $M_{☾} = 7.348 \times 10^{22} \, \mathrm{kg}$
- Raio da Lua: $R_{☾} = 1738 \times 10^3 \, \mathrm{m}$

Conversão de unidades

- Unidade Astronómica (UA): $1 \, \mathrm{UA} = 1.49 \times 10^{11} \, \mathrm{m}$
- Parsec (pc): $1 \, \mathrm{pc} = 3.086 \times 10^{16} \, \mathrm{m}$

Relações importantes

- Velocidade angular $\Omega = \dfrac{2\pi}{T} [\mathrm{rad\,s^{-1}}]$
- Lei de Stefan-Boltzmann: $L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$
- Distância em parsec: $d_{pc} = 10^{\frac{m-M+5}{5}}$
- Magnitude absoluta: $M = -2,5 \log(L) + K$, em que K é uma constante
- Lei da Gravitação Universal: $F_g = G\dfrac{Mm}{r^2}$
- Lei de Wien: $\lambda_{max} = \dfrac{b}{T}$

- Lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$