14^as Olimpíadas Nacionais de Astronomia

Prova da final nacional

PROVA TEÓRICA

17 de maio de 2019

Duração máxima – 120 minutos

Notas: Leia atentamente todas as questões. As primeiras 5 questões são de escolha múltipla. Todas as respostas devem ser dadas na folha de prova sendo devidamente assinadas. Existe uma tabela com dados e informações úteis no final do enunciado.

---

1) Qual é aproximadamente o diâmetro angular da Lua no céu nocturno?

a) 1 grau

b) 0.5 graus

c) 2 graus

d) 4 graus

R: B

2) Um buraco negro com a massa da Terra seria do tamanho de:

a) o Sol

b) a Lua

c) uma bola de bowling

d) um berlinde

R:D

3) A transição de um electrão num átomo de hidrogénio do nível 3 para o nível 2 produz o fotão mais energético da série de Balmer com uma frequência 4,6 x 10^{14} Hz. Em que comprimento de onda se pode observar esta transição num laboratório?

a) 652 nm

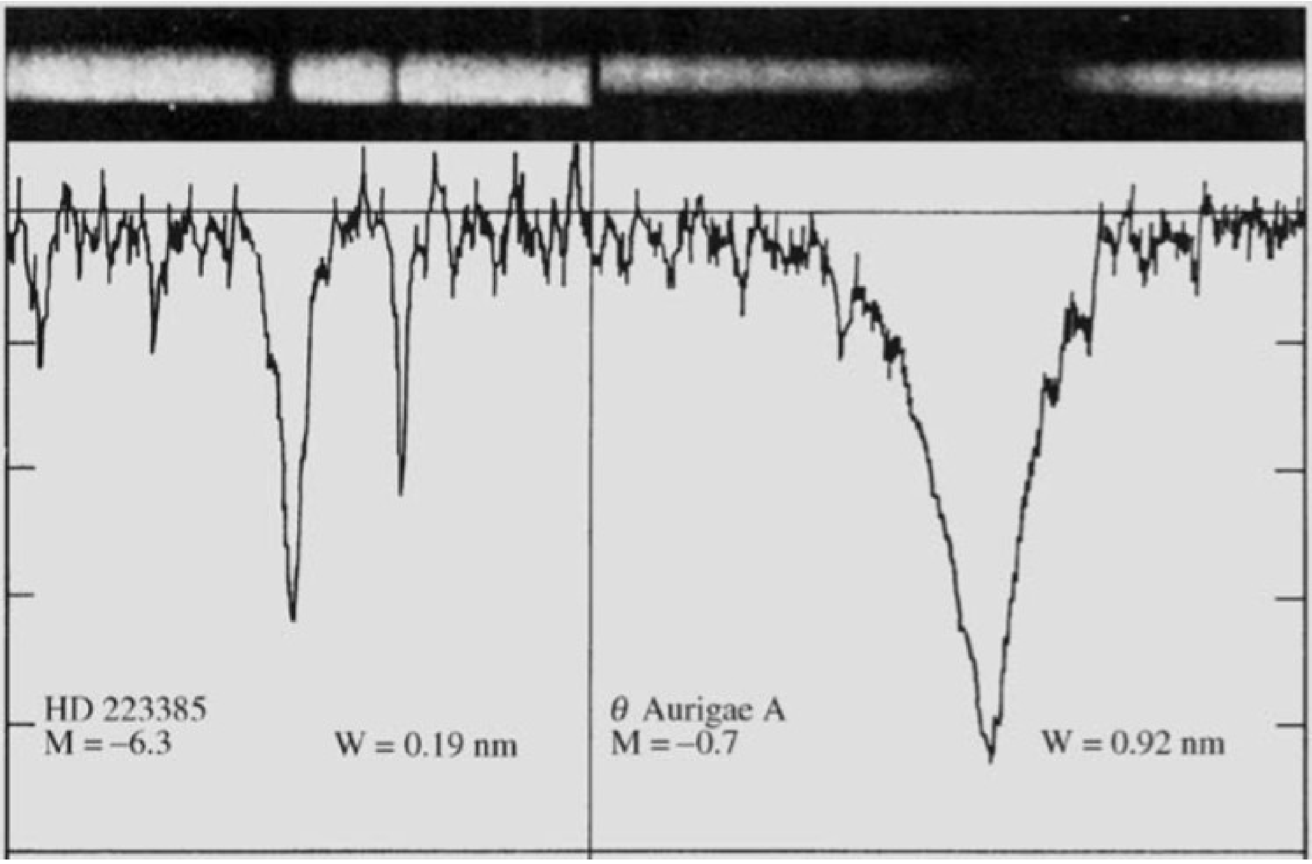
b) 532 nm

c) 582 nm

d) 592 nm

R: A

4) A figura abaixo mostra os espectros de absorção das estrelas HD 2223385 (estrela 1, à esquerda) e Theta Aurigae A (estrela 2, à direita). Ambas são do tipo espectral A. Entretanto, a estrela 1 possui perfil da linha de absorção de hidrogênio alfa (Hα) bastante estreito, enquanto o perfil da mesma linha para a estrela 2 é largo.



Podemos afirmar que:

a) A estrela 1 é menos quente que a estrela 2

b) A atmosfera da estrela 1 é menos densa que a atmosfera da estrela 2

c) A estrela 1 possui menos hidrogênio que a estrela 2

d) A velocidade de afastamento da estrela 1 é menor que a da estrela 2

R: B

5) Qual seria a temperatura efectiva da Terra caso esta orbitasse o Sol a 0,5 UA? Considere que a Terra se comporta como um corpo negro e que o seu albedo é aproximadamente igual a 0,3. (escolhe a opção mais próxima da correcta)

a) 255 K

b) 364 K

c) 350 K

d) 360 K

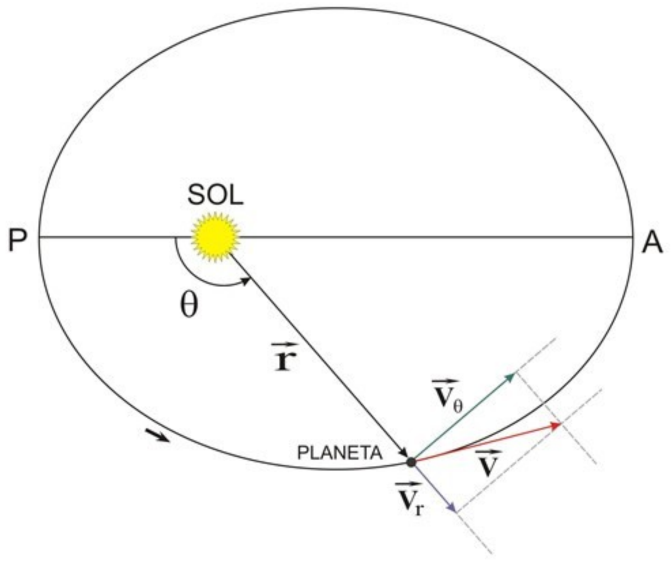
R: B

6) Reproduz a demonstração feita pelo matemático e filósofo Eratóstenes da esfericidade da Terra, estimando os valores das medições obtidas por ele, se ele tivesse chegado a um resultado para o raio da Terra exactamente igual ao que se conhece hoje. Faz um esboço do problema para ajudar a melhor visualizar a genialidade da prova. (considere que a distância entre Alexandria e Siena é de aproximadamente 795 km e que a vara utilizada tinha 50 cm).

7) A órbita elíptica de um astro (massa **m**) ao redor do Sol (massa **M**) pode ser definida pela sua excentricidade **e** e o seu semi-eixo maior **a**. Com estes valores podemos calcular a distância **r** do astro ao Sol e o módulo da sua velocidade orbital **V**, através das seguintes fórmulas:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos\theta)} \quad \text{e} \quad V^2 = G(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Onde **θ** é chamado de anomalia verdadeira, como mostra a figura a seguir, fora de escala.



Calcule a razão entre a velocidade orbital no periélio e no afélio (Vp/Va) de um cometa cuja órbita tem semi-eixo a= 3,0 U.A. e excentricidade e= 0,6.

Primeiramente vamos encontrar a distância do cometa no periélio (r_p) e no afélio (r_a):

Para o periélio, temos θ = 0º. Então,

$$r_p = \frac{a(1-e^2)}{1+e} = a(1-e)$$

Para o afélio, temos θ = 180º. Então,

$$r_a = \frac{a(1-e^2)}{1-e} = a(1+e)$$

Agora, substituindo na fórmula do módulo da velocidade orbital, teremos:

$$V_p^2 = G(M+m)\left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right) = G(M+m)\frac{1+e}{a(1-e)}$$

8) O processo de crescimento de uma galáxia é regulado pela taxa de conversão de gás em estrelas. Considera uma galáxia que está a formar estrelas a uma taxa de aproximadamente 5×10^{30} kg por ano e contém cerca de 10^9 massas solares ($M_\odot$) de gás na sua constituição.

a) Assumindo que a taxa se mantém constante, estima quanto tempo demora a converter o gás existente em estrelas.

R: 5 x 1030 kg -> 2.5M☉

Escala de tempo = massa de gás / TFE = 109/2.5 = 4 x 108 anos

b) A massa actual dessa galáxia é de 10^{12} $M_\odot$ em estrelas. Calcula quanto tempo demoraria a formar esta quantidade de estrelas com a taxa de formação indicada. Compara com a idade do Universo e comenta o resultado.

R: Escala de tempo = massa estelar / TFE = 10^{12}/2.5 = 4 x 10^{11} anos

Idade do Universo = 1.38 x 10^{10} anos

Como seria preciso mais tempo que a idade do universo isto implica que a taxa de formação estelar teria de ser mais elevada no passado.

c) A luminosidade da risca de Hα está relacionada com a taxa de formação estelar (TFE) recente através da expressão: $L_{H\alpha}$ [J/s] = 1.3 x 10^{34} x TFE [$M_\odot$/ano]. Sabendo que esta galáxia está a 10 Mpc de distância, calcula o fluxo de Hα que é observado na Terra.

R: LHα = 1.3 x 1034 x 2.5 = 3.25 x 1034 J/s

D = 10 Mpc = 3.0856 × 1023 m

Fluxo = L/ (4 * π * d2) = 3.25 x 1034 /(4 * π * (3.0856 × 1023)2) = 2.7 x 10-14 J / s / m2

d) Sabendo que o comprimento de onda da risca de Hα é de 656 nm, calcula o número de fotões Hα provenientes desta galáxia que atingem a superfície terrestre durante um ano.

R: Energia incidente = Fluxo x Area Terra = 2.7 x 10-14 J / s / m2 x 2.55 x 1014 m2 = 6.885 J/s

Energia de um fotão = hc/lambda = 3.04 x 10-19 J

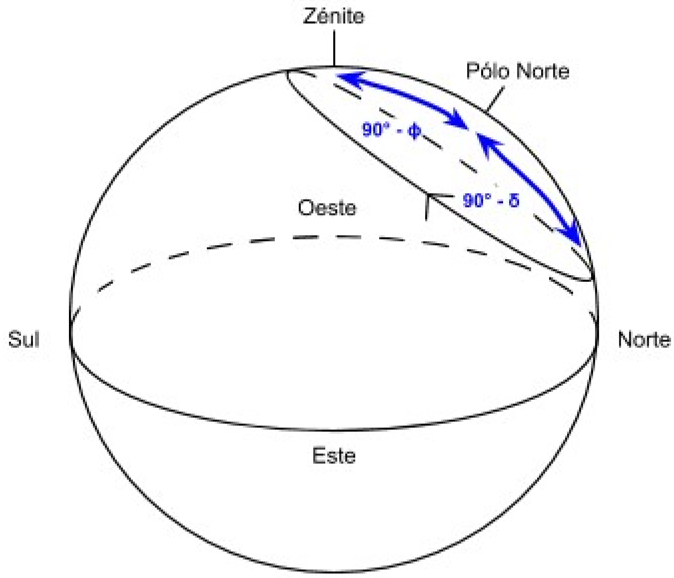
Número de fotões por segundo = Energia incidente / Energia de um fotão = 2.26 x 1019 fotão/s

Número de segundos num ano = 3600 * 24 * 365.25 (365 também aceite) = 31557600 s

Número de fotões num ano -> 31557600 s x 2.26 x 1019 fotão/s = 7.13x1026

9) Estrelas circumpolares são estrelas que não têm nascer nem ocaso e, portanto, nunca estão abaixo do horizonte. Considera uma estrela com uma declinação δ como vista por um observador no hemisfério norte a uma latitude ϕ.

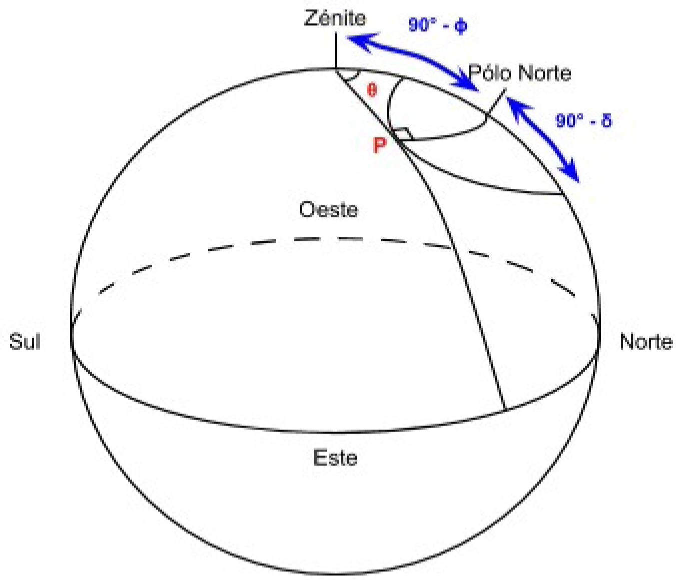
a) Desenha uma figura que ilustra o movimento da estrela no céu, identificando todos os ângulos relevantes.



b) Encontra a condição entre δ e ϕ que a estrela deve cumprir para ser circumpolar.

R: (90° - ϕ) + (90° - δ) < 90° → ϕ + δ > 90°

c) Escreve uma expressão (em termos de δ e ϕ) para o azimute máximo de uma estrela circumpolar que não pode chegar a 180°. Nota que o azimute de uma estrela é o ângulo que a direcção do astro faz com a direcção do Norte.



Para (90° - δ) > (90° - ϕ) ou ϕ > δ: o azimute máximo é 180°.

Para (90° - δ) < (90° - ϕ) ou ϕ < δ: se P for o ponto de maior azimute. O ângulo ZPN = 90°. Aplicando a lei dos senos para triângulos esféricos:

sen(θ)/sen(90° - δ) = sen(90°)/sen(90° - ϕ) → sen(θ = cos(δ)/cos(ϕ))

O azimute máximo = arcsen(cos(δ)/cos(ϕ)).

10) Uma galáxia espiral tem uma curva de rotação que pode ser aproximada pela seguinte expressão

$$v(R)=200\left(1-e^{-R/R_0}\right)km/s$$

onde R é a distância ao centro da galáxia e R_0 é uma constante igual a 4 kpc.

a) Estima quanta massa se encontra até 16 kpc do centro em unidades de massas solares.

R: v(16)=200 km/s

Igualar força gravítica à força centrípeda e daí vem M = 10^{11} massas solares

b) Mostra que para distâncias pequenas ($R \ll R_0$) a velocidade angular é aproximadamente constante. (dica: para $x \ll 1$, $e^x \simeq 1+x$)

R: $v(R) \simeq 200\left(1-1+(R/R_0)\right) \simeq 200\, R/R_{0,}\, para\, R \ll R_0$

$v=\omega R \simeq 200\, R/R_0 \Leftrightarrow \omega \simeq 200/R_0$

c) Determina o período rotacional das estrelas próximas do centro da galáxia, em anos.

R: $P=\frac{2\pi}{\omega} \simeq 120\, milhões\, de\, anos$

d) Para grandes distâncias do centro, a curva de rotação é quase constante. Assume que a matéria que é responsável por este perfil está distribuida de forma esférica e simétrica relativamente ao centro da galáxia com uma densidade que varia com a distância como $\rho(R) \propto R^{-\alpha}$, para R>>R_0 kpc. Determina o valor de α que resulta desse perfil constante da curva de rotação, assumindo que $M(R<R_0) \ll M_{total}$.

R: Usando a relação entre massa e densidade, temos $M \propto R^{-\alpha+3}$

Igualando a força gravítica à força centrípeda e substituindo a relação anterior,

temos $R^{3-\alpha} \propto \frac{v^2 R}{G} \Rightarrow \alpha=2$

Tabela de dados:

Constantes universais

Velocidade da luz (vazio): $c=3\times 10^8 m\, s^{-1}$

Constante gravitacional: $G = 6{,}673 \times 10^{-11}\, N\, m^2\, kg^{-2}$

Constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5{,}670 \times 10^{-8}\, W\, m^2\, K^{-4}$

Dados sobre o Sol:

Massa do Sol: $M_{\odot}$ = $1{,}99 \times 10^{30}\, kg$

Raio do Sol: $R_{\odot}$ = $6{,}955 \times 10^{8}\, m$

Período médio de rotação do sol: T = 27 dias

Luminosidade do Sol: $L_{\odot}$ = $3{,}846 \times 10^{26}\, W$

Temperatura superficial do Sol: T_{ef} = 5780 K

Dados sobre a Terra:

Massa da Terra: $M_{\otimes}$ = $5{,}972 \times 10^{24}\, kg$

Raio da Terra: $R_{\otimes}$ = $6371 \times 10^{3}\, m$

Distância média da Terra ao Sol: $149{,}6 \times 10^{9}\, m$

Dados sobre a Lua:

Massa da Lua: $M_{☾}$ = $7{,}348 \times 10^{22}\, kg$

Raio da Lua: $R_{☾}$ = $1738 \times 10^{3}\, m$

Conversão de unidades:

Unidade Astronómica (UA): $1\, UA = 1{,}49 \times 10^{11}\, m$

Parsec (pc): $1\, pc = 3{,}086 \times 10^{16}\, m$

Relações importantes:

Velocidade angular Ω = $\frac{2\pi}{T}$ [rad.s-1]

Lei de Stefan-Boltzmann: $L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$

Distância em parsec: $d_{pc} = 10^{\frac{m - M + 5}{5}}$

Magnitude absoluta: $M = -2{,}5 \log(L) + K$, em que K é uma constante

Lei da Gravitação Universal: $Fg = G \frac{Mm}{r^2}$