18as
Olimpíadas Nacionais de Astronomia

Prova Teórica da Final Nacional

12 de Abril de 2024
15:00
Duração máxima – 120 minutos

Notas:

- Lê atentamente todas as questões.
- As 6 primeiras perguntas são de escolha múltipla.
- Existe uma tabela com dados e informações úteis no final do enunciado.
- Todas as respostas devem ser dadas na folha de prova sendo devidamente assinadas.

PERGUNTAS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. [0.75 Pontos] Qual a definição de hora sideral num determinado lugar?

a) É igual à hora sideral em Greenwich + a constante do respectivo fuso horário.

b) O azimute do Sol, medido em horas.

c) O ângulo horário do Sol + 12h.

d) A ascenção recta de objectos que passam no meridiano nesse preciso instante.

Solução: Resposta: d)

2. [0.75 Pontos] Qual das seguintes frases melhor descreve a órbita de um cometa proveniente da Nuvem de Oort?

a) A órbita é perfeitamente circular.

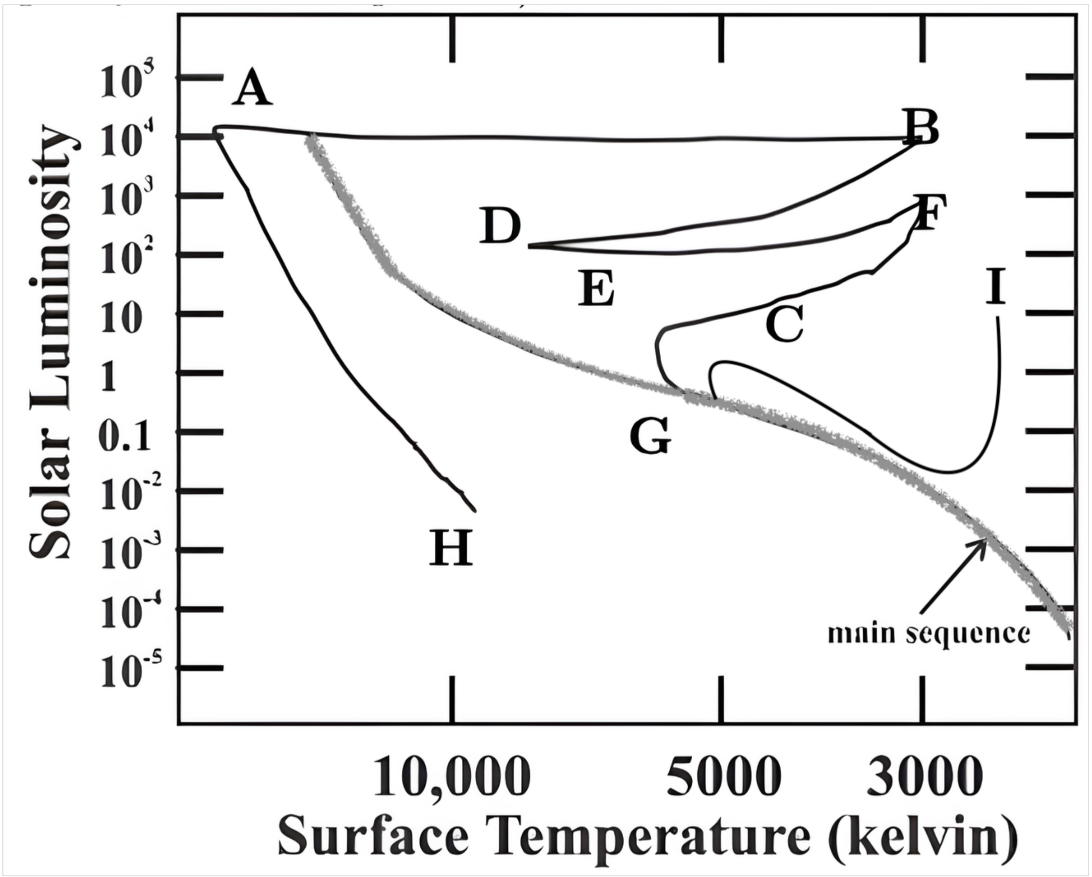
b) A órbita é elíptica.

c) A órbita é parabólica.

d) A órbita é hiperbólica.

Solução: Resposta: b)

3. [0.75 Pontos] A figura a seguir mostra um diagrama H-R para uma estrela de massa inicial 1 $M_{\odot}$ com as suas principais etapas de evolução indicadas, conforme listadas na tabela abaixo da figura. Assinala a alternativa que melhor relaciona a figura com a tabela.



1	Gigante vermelha com fusão de He na camada ao redor do núcleo
2	Anã Branca
3	Fusão de H na camada ao redor do núcleo
4	He disponível para fusão esgota-se, núcleo colapsa
5	Fusão de He no núcleo
6	Gigante Vermelha com Flash de He
7	Protoestrela
8	Estrela de Sequência Principal
9	Envelope ejetado, formação da nebulosa planetária

a) A4 B9 C1 D5 E6 F3 G8 H2 I7

b) A8 B6 C5 D3 E4 F1 G2 H7 I9

c) A9 B1 C3 D4 E5 F6 G8 H2 I7

d) A7 B6 C1 D4 E5 F3 G8 H2 I9

Solução: Resposta: C)

4. [0.75 Pontos] Qual é o número máximo de eclipses solares que podem ocorrer num ano?

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

Solução: Resposta: d)

5. [0.75 Pontos] Qual das seguintes observações é considerada uma evidência da existência de *matéria escura*?

a) A existência de buracos negros supermassivos no centro das galáxias.

b) A descoberta de corpos frios (anãs castanhas, planetas flutuantes) em grande quantidade na nossa galáxia.

c) A velocidade de rotação acima do esperado das estrelas das zonas mais externas das galáxias de disco.

d) A existência de poeira e nuvens moleculares que são opacas à luz no visível.

Solução: Resposta: c)

6. [0.75 Pontos] Qual a composição química aproximada do Universo primordial após o processo de nucleossíntese?

a) 71% Hidrogénio, 28% Hélio, 1%Deutério, <1% outros elementos.

b) 75% Hidrogénio, 25% Hélio, <1% outros elementos.

c) 74% Hidrogénio, 22% Hélio, 2% Deutério, 1% Lítio e <1% outros elementos.

d) 76% Hidrogénio, 23% Hélio, 1% Lítio, <1% outros elementos.

Solução: Resposta: b)

PERGUNTAS DE RESPOSTA LONGA

7. [1.5 Pontos] Recentenmente, a ESA decidiu aprovar uma missão espacial à lua de Saturno Encélado para estudar as propriedades de um oceano líquido que se pensa existir debaixo da sua superfície gelada. Para esse fim, está a ser proposto o uso de um radar capaz de medir a espessura da camada de gelo e estimar a profundidade a que a água líquida se encontra. A sonda irá orbitar Encélado a uma altura de 150 km e o radar será capaz de emitir um pulso que atravessará a camada de gelo e refletir na zona de transição. Para um pulso mediu-se que entre o envio e a recepção do sinal na sonda passaram-se 1.5 milissegundos. Assumindo que a velocidade de propagação do sinal na camada de gelo é de 1.68×10^8m/s, calcula a espessura da camada de gelo, em km, neste local de Encélado.

Solução: O pulso de radar emitido tem de viajar duas vezes a distância entre a sonda e a camada onde é refletido. Sabemos também que esse pulso irá ter de percorrer o espaço vazio de 100km entre a superfície de Encélado e a sonda. Daí temos:

$$t_{\text{total}} = 2 \times \left(t_{\text{sonda}-\text{superfcie}} + t_{\text{gelo}}\right)$$

O tempo que o sinal demora a percorrer esses 150 km é dado por:

$$t_{\text{sonda}-\text{superfcie}} = \frac{d_{\text{superfcie}}}{c} = \frac{150000}{3 \times 10^8} = 0.5\text{ms}$$

e

$$t_{\text{gelo}} = \frac{d_{\text{gelo}}}{v_{\text{gelo}}}$$

Rearranjando a equação inicial e substituindo pelos valores derivados, temos:

$$d_{\text{gelo}} = v_{\text{gelo}} \left(\frac{t_{\text{total}}}{2} - \frac{d_{\text{superfcie}}}{c}\right) = 42\text{km}$$

8. [1.5 Pontos] Uma estrela massiva, de massa 20 $M_\odot$ e luminosidade 100 $L_\odot$, encontra-se em um estágio avançado da sua evolução. 30% da sua luminosidade é proveniente da queima de Hélio em Carbono mediante a reação nuclear

$$3^4\text{He} \rightarrow^{12} \text{C} + \gamma \tag{1}$$

Se 20% da massa da estrela está agora na forma de Hélio, calcule o tempo em que ela permanecerá na fase de queima de He em C.

Dados: Massas atômicas
^{4}He = 4,002603 u
^{12}C = 12,00000 u

Solução:
Massa de 3 núcleos de Hélio: 3 x 4,002603 u = 12,007809 u
Massa convertida em energia: 12,007809 u - 12,00000 u = $7,809 \times 10^-3$ u
Diferença fracionária de massa: $\frac{7{,}809 \times 10^{-3}}{12{,}007809} = 6,503 \times 10^{-4}$
Massa estelar: $20 \times \left(2,00 \times 10^{30}\right) = 4,00 \times 10^{31}$ kg
Total de massa convertida em energia durante a queima de Hélio
$E = mc^2 = 0,2 \times \left(4,00 \times 10^{31}\right) \times \left(6,503 \times 10^{-4}\right) \times \left(3,00 \times 10^8\right)^2 = 4,68 \times 10^{44}$ J
Tempo de queima de Hélio

$t = \frac{E}{0,3L} = \frac{4,68\times10^{44}}{0,3\times100\times(3,86\times10^{26})} = 4,04\times10^{26}$ s
$t = 1,28\times10^{9}$ anos

9. [4 Pontos] Tens a tarefa de conceber a trajectória da missão de uma nave com o objectivo de explorar uma Lua distante de Júpiter. Para isso, a nave tem de fazer uma manobra de assistência gravitacional em torno de Vénus, para ganhar a velocidade necessária para chegar a Júpiter. Para simplificar, assumimos que todas as órbitas dos planetas do sistema solar são circulares e co-planares. A nave aproxima-se de Vénus com uma velocidade de 28.78 km/s relativamente ao Sol, na mesma direcção e sentido da órbita de Vénus.

Dados:

- $M_{Venus} = 4.867 \times 10^{24}$ kg
- $a_{Venus} = 0.72$ UA
- $M_{Jupiter} = 1.898 \times 10^{27}$ kg
- $a_{Jupiter} = 5.2$ UA

a) Calcula a velocidade da nave relativamente a Vénus no momento em que entra na esfera de influência do planeta.

b) Assume que a nave efectua uma assistência gravitacional perfeita, que lhe permite atingir a velocidade máxima teoricamente possível relativamente ao Sol após deixar a esfera de influência de Vénus. Qual é o valor desse máximo teórico.

c) Justifica com cálculos se a velocidade calculada na alínea anterior é suficiente para alcançar Júpiter.

d) Qual é, em termos práticos, a principal razão pela qual, na realidade, não é possível efectuar a assistência gravitacional descrita na alínea b).

Solução:

a) velocidade orbital de Vénus: $V_V = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_V}} = 35.02$ km/s

Como a nave se aproxima de Vénus no mesmo sentido e direcção da órbita de Vénus, a velocidade relativa é simplesmente $v_{rel} = V_n - V_V = 28.78 - 35.02 = -6.24$ km/s, ou seja no sentido contrário ao da órbita de Vénus.

b) neste caso, a velicidade relativa é invertida, passando a $+6.24$ km/s, na direcção e sentido da órbita de Vénus. Assim, a velocidade da nave quando deixa a esfera de influência será $V_n = V_V + v_{rel} = 41.26$ km/s.

c) A resposta é sim. Como a velocidade imediatamente após a assistência gravitacional é na direcção da órbita de Vénus, este ponto corresponde ao periélio da nova órbita de transferência. Há várias formas de provar se esta velocidade é suficiente como, por exemplo: calcular a velocidade no periélio para uma órbita com periélio igual ao raio da órbita de Vénus e afélio igual ao raio da órbita de Júpiter (o caso limite para chegar a Júpiter) e ver se é inferior ao valor da alínea anterior ou calcular o semieixo de uma órbita com periélio em Venus e velocidade igual à da alinea anterior e ver se é maior do que $(a_J + a_V)/2$.

d) Não é possível porque seria necessário passar pelo foco da órbita, o que significa chocar com a suferfície do planeta.

10. [4.5 Pontos] Estima-se que um terço dos sistemas estelares na nossa galáxia são sistemas binários ou com mais de duas estrelas. Estes sistemas podem ser compostos por objectos muito massivos (como estrelas de neutrões ou buracos negros). Nestes casos, a emissão de ondas gravitationais pode ser detectada aqui na Terra. Neste exercício vamos estimar agumas quantidades relacionadas com ondas gravitationais e que informação elas transportam.

Considera dois corpos de massas em órbitas circulares em torno um do outro como esquematizado na figura 1. Os corpos têm massas m_1 e m_2, respectivamente, e estão a uma distância a um do outro. O movimento orbital tem periodo P.

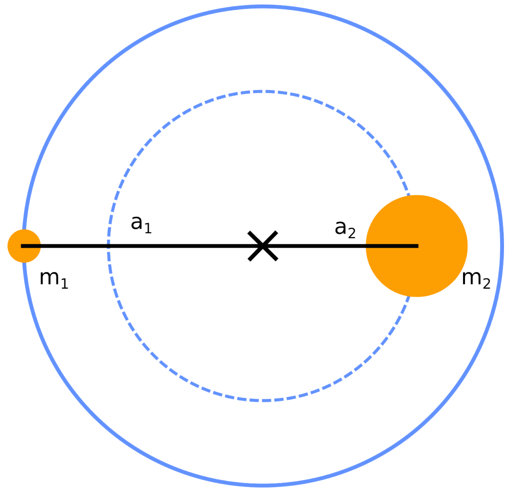


Figura 1: Sistema binário de estrelas

a) Considera a origem das tuas coordenadas no centro de massa do sistema. Escreve o raio orbital de cada corpo, a_1 e a_2 em termos de m_1, m_2 e a.

b) Qual a força gravítica sentida por cada corpo?

c) Para que os corpos se mantenham nas respectivas orbitas, a força gravítica tem de ser igual à força centrípeta. Igualando as duas forças, mostra que a a frequência orbital ω é dada por

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}$$

d) A energia total do sistema é dada pela soma da energia potencial gravitica e a energia cinética de cada corpo. Mostra que esta é dada por:

$$E = -\frac{G m_1 m_2}{2a}$$

e) Um sistema binário emite constantemente ondas gravitacionais. De acordo com a teoria da relatividade geral, a energia emitida por unidade de tempo (potência) sob a forma destas ondas é dada pela expressão:

$$\dot{E} = \frac{32 G \mu^2 a^4 \omega^6}{5c^5}$$

onde $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ representa a massa reduzida do sistema. Ao perder energia orbital, os dois corpos aproximam-se até que coalescem num só. O tempo característico para que isto aconteça pode ser estimado através de $\Delta t = -E/\dot{E}$. Utiliando as expressões acima, obtem uma expressão para Δt em termos de m_1, m_2 e a.

f) Quando tempo demorará a coalescer duas estrelas de neutrões de igual massa $m_1 = m_2 = 1.4 M\odot$ numa órbita com um período de 10 horas? Seria exectável observer a coalescência das duas estrelas nos próximos 100 anos? (Sugestão: começa por encontrar a separação entre as estrelas como base na lei de Kepler derivada na alínea c).

Solução:

a) Pela definição de centro de massa temos que

$$0 = a_1 m_1 + a_2 m_2$$

e utilizando $a = a_1 + a_2$, chegamos à resposta:

$$a_1 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) a \qquad a_2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) a$$

b) A força gravítica sentida por cada corpo é dada por

$$F = \frac{G m_1 m_2}{a^2}$$

c) A força centrípeta sentida por cada corpo é dada por

$$\begin{aligned} F_{centripeta} &= \frac{m_1 v^2}{a_1} \\ &= \frac{m_1 (\omega a_1)^2}{a_1} \\ &= m_1 a_1 \omega^2 \\ &= \omega^2 \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) a \end{aligned}$$

Igualando isto à força gravítica, e resolvendo em ordem a ω^2 temos a lei de kepler para sistemas binários.

d) A energia potencial gravítica do sistema é dada por*

$$E_{pot} = -\frac{G m_1 m_2}{a}$$

A energia cinética dos dois corpos é dada por

$$
\begin{aligned}
E_{cinetica} &= \frac{1}{2}m_1(v_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2)^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1(\omega a_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\omega a_2)^2 \\
&= \frac{\omega^2}{2}\left[m_1(a_1)^2 + m_2(a_2)^2\right] \\
&= \frac{\omega^2 a^2}{2}\left[m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\right] \\
&= \frac{\omega^2 a^2}{2(m_1+m_2)^2}\left[m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2\right] \\
&= \frac{\omega^2 a^2 m_1 m_2 (m_1+m_2)}{2(m_1+m_2)^2} \\
&= \frac{\omega^2 a^2 m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} \\
&= \frac{G a^2 m_1 m_2}{2a^3} \\
&= \frac{G m_1 m_2}{2a}
\end{aligned}
$$

Somando as duas quantidades provaamos o resultado desejado.

e) Começando por escrever $\dot{E}$ em termos das quantidades conhecidas temos:

$$\dot{E} = \frac{32G^4(m_1 m_2)^2(m_1+m_2)}{5c^5 a^5}$$

Dividindo por E temos então:

$$\Delta t = -\frac{E}{\dot{E}} = \frac{5c^5 a^4}{64G^3(m_1 m_2)(m_1+m_2)}$$

f) Utilizando a lei de kepler temos que o semi-eixo maior será de

$$a = \left[\frac{G(m_1+m_2)}{\omega^2}\right]^{1/3} = \left[\frac{T^2 G(m_1+m_2)}{4\pi^2}\right]^{1/3} \approx 3 \times 10^9 \text{ m}$$

substituindo isto na expressão do tempo temos

$$\Delta t \approx 1.3 \times 10^{10} = 13 \text{ Gyr}$$

pelo que o tempo de coalescência é semelhante à idade do universo.

11. [4 Pontos] O Isaac Newton Telescope (INT), situado nas ilhas Canárias, possui 4 CCDs de 2000 x 4000 pixels, cada um sendo quadrado e com um lado de 13.5μm. Conta ainda com um espelho de 2,54m e uma distância focal de 8,36m. Este telescópio foi utilizado por uma equipa de astrónomos portugueses para observar galáxias jovens distantes através da deteção da forte emissão na risca de Lyα (comprimento de onda em laboratório de 1216Å) usando filtros de banda curta.

a) Calcula a área de céu (em graus quadrados) observada pelos 4 CCDs por este telescópio. Calcula também o tamanho angular correspondente a cada lado de um pixel individual em segundos de arco.

b) Sabendo que um dos filtros utilizados foi o NB392 com um comprimento de onda central de 3920Å e uma largura de 52Å, estima quais os redshifts em que galáxias emissoras de Lyα podem ser detetadas com este filtro.

c) No conjunto dessas observações, foram detetadas 159 galáxias candidatas. O tamanho médio destas fontes foi medido como um raio (r_{pix}) de 1 pixel. Calcula o tamanho físico (em kpc) destas fontes. Assume uma distância diâmetro angular $D_A(z = 2.225) = 1733.3$Mpc.

d) A partir da medição do valor de contagens do CCD, observou-se que em média estas fontes têm um número médio de contagens de 1500. Sabendo que o factor de ganho (conversão entre contagens e número de electrões detetados) é de $g = 1.2$ $(\mathrm{e}^-/\mathrm{contagem})$ e que o tempo de exposição é de 12 000 segundos, calcula a luminosidade média (sistema SI) destas fontes medidas no filtro indicado na alínea b). Assume uma distância luminosidade $D_L(z = 2.225) = 18027.8$Mpc.

Solução:

a) $FoV = s/f$

$$s_1 = 2000 * 13.5 \times 10^{-6}/8.36 \approx 0.003\text{rad} = 0.185^\circ$$

$$s_2 = 4000 * 13.5 \times 10^{-6}/8.36 \approx 0.006\text{rad} = 0.370^\circ$$

$$A = 4 \times s1 \times s2 = 0.27 \text{ square degrees}$$

Para o tamanho de um pixel

$$s_p = 13.5 \times 10^{-6}/8.36 \approx 0.33''$$

b) Sabendo que $\lambda_{\text{obs}} = (1 + z)\lambda_{\text{rest}}$,

$$z_{\text{min}} = \frac{3920 - 26}{1216} - 1 \approx 2.20$$

$$z_{\text{max}} = \frac{3920 + 26}{1216} - 1 \approx 2.25$$

A resposta é que essas galáxias terão um redshift entre 2.20 e 2.25.

c) Considerando a relação entre raio físico e distância

$$\theta[\text{rad}] = \frac{r}{D_A}$$

onde

$$\theta[\text{rad}] = \frac{r_{\text{pix}} \times 0.33}{206265}$$

temos que

$$r[\text{kpc}] = \theta \times D_A \times 1000 \approx 2.8\text{kpc}$$

d) Vamos começar por estimar o fluxo médio medido, que é dado por:

$$F = \frac{E}{t_{\text{exp}} \times A_{\text{tel}}}$$

onde

$$E = N_{\text{fot}} \times \frac{hc}{\lambda}$$

e

$$N_{\text{fot}} = counts \times g$$

então

$$F = \frac{counts \times g \times hc}{\lambda \times t_{\text{exp}} \times A_{\text{tel}}} = 1.5 \times 10^{-20}\text{Js}^{-1}\text{m}^{-2}$$

Agora podemos converter fluxo em luminosidade usando

$$L = 4\pi D_L^2 F \approx 5.8 \times 10^{34}\text{W}$$

Tabela de Dados:

Constantes Universais

- Velocidade da luz (vazio): $c = 3 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- Constante gravitacional: $G = 6.673 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^{2}\,kg^{-2}}$
- Constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{2}\,K^{-4}}$
- Constante de dispersão de Wien: $b = 2.8976 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$
- Unidade de massa atómica: $u = 1.660\,54 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
- Constante de Planck: $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$

Dados sobre o Sol

- Massa do Sol: $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- Raio do Sol: $R_{\odot} = 6.955 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$
- Período médio de rotação do sol: $T = 27$ dias
- Luminosidade do Sol: $L_{\odot} = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$
- Magnitude Absoluta Visual do Sol: $M_{\odot} = 4.83\,\mathrm{mag}$
- Temperatura superficial do Sol: $T_{\mathrm{ef}} = 5780\,\mathrm{K}$

Dados sobre a Terra

- Massa da Terra: $M_{\oplus} = 5.972 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- Raio da Terra: $R_{\oplus} = 6371 \times 10^{3}\,\mathrm{m}$

Dados sobre a Lua

- Massa da Lua: $M_{☾} = 7.348 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}$
- Raio da Lua: $R_{☾} = 1738 \times 10^{3}\,\mathrm{m}$

Conversão de unidades

- Unidade Astronómica (UA): $1\,\mathrm{UA} = 1.49 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
- Parsec (pc): $1\,\mathrm{pc} = 3.086 \times 10^{16}\,\mathrm{m}$
- Ano-luz (ly): $1\,\mathrm{ly} = 9.46 \times 10^{15}\,\mathrm{m}$

Relações importantes

- Velocidade angular $\Omega = \frac{2\pi}{T} [\text{rad s}^{-1}]$
- Lei de Stefan-Boltzmann: $L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$
- Distância em parsec: $d_{pc} = 10^{\frac{m-M+5}{5}}$
- Magnitude absoluta: $M = -2,5\log(L) + K$, em que K é uma constante
- Lei da Gravitação Universal: $F_g = G\frac{Mm}{r^2}$
- Lei de Wien: $\lambda_{max} = \frac{b}{T}$
- Lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$