18as
Olimpíadas Nacionais de Astronomia

Prova de Análise de Dados da Final Nacional

12 de Abril de 2024
18:00
Duração máxima – 60 minutos

Notas:

- Leia atentamente todas as questões.
- Existe uma tabela com dados e informações úteis no final do enunciado.
- Todas as respostas devem ser dadas na folha de prova sendo devidamente assinaladas.

---

1. [6 Pontos] Na prova teórica, derivaste a expressão relativa ao decaimento do periodo orbital de uma binaria de estrelas devido a emissão de ondas gravitacionais. Agora, vamos tentar perceber como podemos testar essas expressões teóricas experimentalmente. Para tal, vamos explorar o pulsar **PSR B1913+16** que é precisamente um sistema binário de uma estrela de neutrões e de um pulsar. Como se move extremamente rápido, o atraso entre os pulsos do pulsar, permite medir os parâmetros orbitais do sistema. Na figura 1 podes observar os dados típicos para os tempos de atraso dos pulsos.

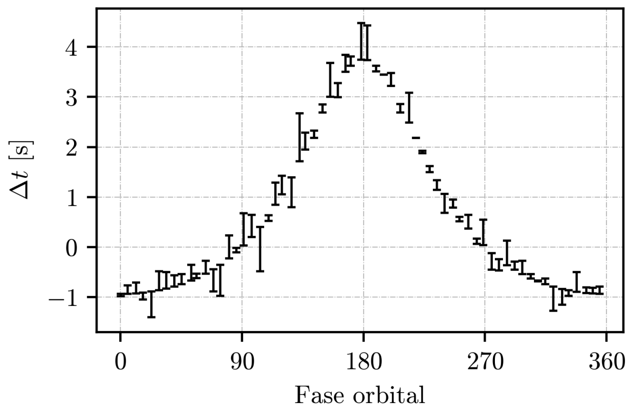

Figure 1: Tempos de atraso para o pulsar PSR B1913+16

a) O tempo de atraso entre pulsos pode ser descrito pela seguinte equação:

$$\Delta t = K_1 \left[\frac{(1-e^2)\sin(\omega+\phi)}{1+e\cos\phi} \right]$$

onde e representa a excentricidade, ω o argumento do periastro e ϕ a fase orbital. A forma da curva é única e exclusivamente determinada pelo termo entre parêntesis rectos, pelo que é possível encontrar os melhores parâmetros de ω e e que descrevem a forma. Compara a Figura 2 com a tabela de curvas na figura 3. Que valores de e e ω melhor descrevem a forma e os valores máximo e mínimo da curva?

b) Com os valores da alínea anterior, qual o máximo e mínimo espectável do atraso de tempos Δt? Utilizando estes valores e os pontos da figura 2, calcula K_1.

Os cálculos que acabaste de fazer são uma versão simplificada da análise de dados usualmente feita para estes sistemas. Quando a análise completa é feita, mais parâmetros conseguem ser determinados. Nomeadamente, a inclinação da órbita i e o período orbital T conseguem ser calculados de maneira semalhante ao que fizeste para ω e e. Para o caso deste pulsar, sabemos que $i = 45°$.

c) O valor de K_1 é na verdade uma função do semi-eixo maior da órbita do pulsar a_1 e da inclinação da órbita em relação ao observador:

$$K_1 = \frac{a_1 \sin i}{c}$$

onde c é a velocidade da luz. Utilizando o valor de K_1 calculado na alínea anterior, calcula a_1.

d) Ao observar este pulsar durante vários anos, podemos observar como varia o período orbital do pulsar. A tabela 1 contem os dados referentes ao período do pulsar ao longo de vários anos. Preenche as colunas em falta na tabela. A quantidade ΔP é definida como

$$\Delta P = P - P(t_0)$$

em que t_0 é o tempo da primeira observação.

e) Numa folha de papel milimétrico faz o gráfico de $(t - t_0)$ vs $\Delta P \times P_0^{5/3}$.

f) Encontra a recta que melhor se ajusta aos dados. Não precisas de fazer contas, faz um ajuste 'a olho'. Qual o declive da recta? O período está a aumentar ou a diminuir?

g) O facto de o período não ser constante ao longo do tempo pode ser explicado pela emissão de ondas gravitacionais. De acordo com a teoria da relatividade geral, os pontos experimentais acima podem ser modelados pela expressão:

$$\Delta P \times P_0^{5/3} = (t - t_0)\, K_2$$

Utilizando o declive encontrado na alínea anterior, calcula K_2. Quais as suas unidades? Converte K_2 para unidades SI.

h) O valor teórico de K_2 é dado pela expressão

$$K_2 = \frac{192\pi(2\pi G)^{5/3}\mu}{5c^5(1 - e^2)^{7/2}}$$

onde $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)^{1/3}$. Calcula o valor de μ.

i) Através das leis de Kepler, é possível mostrar que o semi-eixo maior do pulsar que calculaste na alínea c) se relaciona com as massas do sistema e o período orbital pela expressão

$$a_1 = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)^{2/3}} \left(\frac{P_0^2 G}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

Sabendo que massa total do sistema é $m_1 + m_2 = 2.7 M_\odot$, e o valor de μ da alínea anterior, calcula a massa do pulsar m_1 e da estrela de neutrões m_2. (Nota: Se não conseguiste resolver sa alínea anterior, utiliza $a_1 = 2R_\odot$ e $\mu = 1 \times 10^{50}$).

t [anos]	P [s]	erro [s]	$t - t0$	ΔP	$\Delta P \times P_0^{5/3}$
1976.22	27647.99997	0.000009			
1978.48	27647.99985	0.000048			
1983.26	27647.99976	0.000002			
1986.46	27647.99971	0.000043			
1990.45	27647.99955	0.000006			
1994.93	27647.99944	0.000017			
1999.63	27647.99930	0.000010			
2002.09	27647.99923	0.000005			

Solução:

a) Os melhores valor de e e ω são $e = 0.6$ e $\omega = 270°$

b) A expressão para o atraso de tempos simplifica para os valores encotnrados na alínea anterior. Nomeadamente temos que, para $\omega = 270°$,

$$\Delta t = -K_1 \left[\frac{(1 - e^2)\cos(\phi)}{1 + e\cos\phi} \right]$$

Pelo que o máximo e mínimo valor possível para Δt é de

$$\Delta t_{max} = \quad K_1(1 + e) \qquad \text{para } \phi = 180°$$

$$\Delta t_{min} = -\, K_1(1 - e) \qquad \text{para } \phi = 0°$$

K_1 é então calculado directamente de qualquer uma das duas quantidades

$$K_1 = \frac{\Delta t_{max}}{1 + e} = -\frac{\Delta t_{min}}{1 - e}$$

Utilizando o valor da excentricidade da alínea anterior e os máximos e mínimos dos pontos experimentais temos

$$K_1 = \frac{4.0\,\text{s}}{1 + 0.6} = 2.5\,\text{s}$$

c) Dos valores da alínea anterior temos

$$a_1 = \frac{cK_1}{\sin i} = \frac{(2.5\,\text{s}) \times (3 \times 10^8\,\text{m s}^{-1})}{\sin(45°)} \approx 1.061 \times 10^9\,\text{m} \approx 1.5R_\odot$$

d) Preenchendo a tabela temos os valores:

t [anos]	P [s]	erro [s]	$t - t0$	ΔP	$\Delta P \times P_0^{5/3}$
1976.22	27647.99997	0.000009	0.00	0.00E+00	0.0000
1978.48	27647.99985	0.000048	2.26	-1.20E-04	-3033.5707
1983.26	27647.99976	0.000002	7.04	-2.10E-04	-5308.7487
1986.46	27647.99971	0.000043	10.24	-2.60E-04	-6572.7364
1990.45	27647.99955	0.000006	14.23	-4.20E-04	-10617.4973
1994.93	27647.99944	0.000017	18.71	-5.30E-04	-13398.2704
1999.63	27647.99930	0.000010	23.41	-6.70E-04	-16937.4361
2002.09	27647.99923	0.000005	25.87	-7.40E-04	-18707.0190

e) Fazendo o gráfico e ajustando uma recta que passe pela origem obtemos o seguinte gráfico

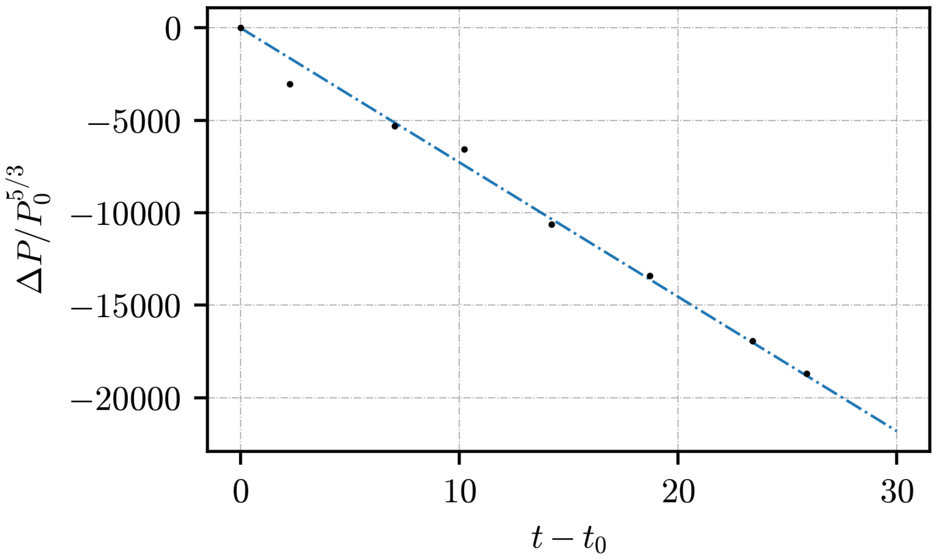

Figure 2: Ajuste linear aos dados experimentais da tabela 1

f) A recta que melhor se ajusta aos pontos experimentais tem a equação

$$\Delta P \times P_0^{5/3} = -727.0 \times (t - t_0)$$

indicando que o periodo está a diminuir.

g) O valor de K_2 é igual ao declive da recta pelo que tem o valor de

$$K_2 = -727.0 \, \frac{\text{segundos}^{8/3}}{\text{ano}}$$

Para converter para unidades SI, temos

$$K_2 = -727.0 \left(\frac{\text{segundos}^{8/3}}{365\,\text{dias} \times 24\,\text{horas} \times 60\,\text{minutos} \times 60\,\text{segundos}} \right) \approx 2.3 \times 10^{-5}\,\text{s}^{5/3}$$

h) Escrevendo a equação em ordem a μ temos:

$$\mu = \frac{5K_2c^5(1-e^2)^{7/2}}{192\pi(2\pi G)^{5/3}}$$

e utilizando os valores das alíneas anteriores podemos calcular o valor de μ

$$\mu \approx 4.15 \times 10^{50}\,\text{kg}^{5/3}$$

i) Pela expressão dada no enunciado, podemos imediatamente calcular o valor de m_2:

$$m_2 = a_1(m_1+m_2)^{2/3} \left(\frac{4\pi^2}{P_0^2 G} \right)^{1/3} \approx 2.95 \times 10^{30}\,\text{kg} \approx 1.47 M_\odot$$

e utilizando a expressão para μ temos que

$$m_1 = \mu \frac{(m_1+m_2)^{1/3}}{m_2} \approx 2.47 \times 10^{30}\,\text{kg} \approx 1.2 M_\odot$$

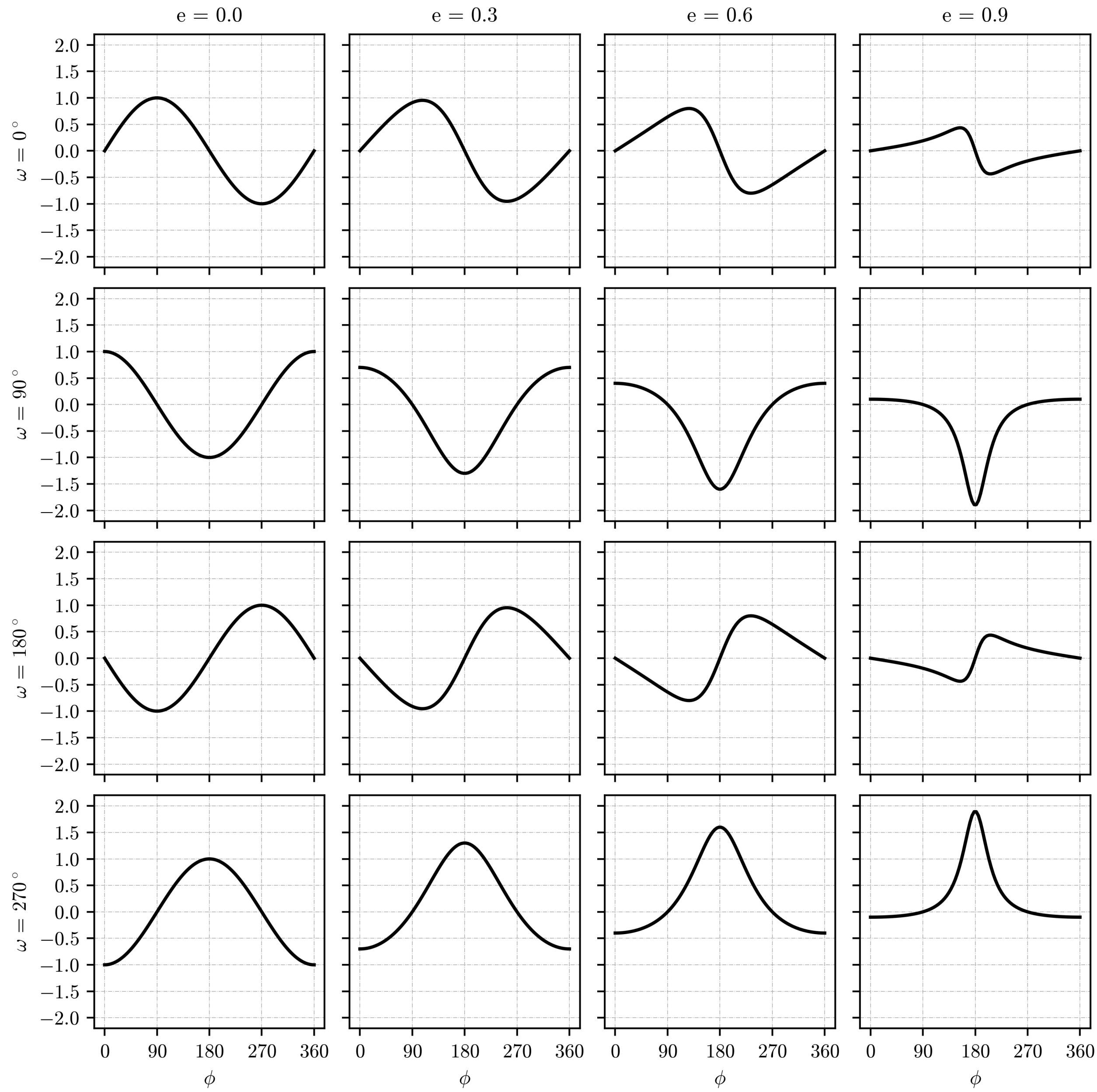

Figure 3: Tempos de atraso para o pulsar PSR B1913+16

2. [4 Pontos] A figura 3 a seguir mostra as curvas de luz de 6 estrelas variáveis cefeidas observadas na galáxia Messier 100.

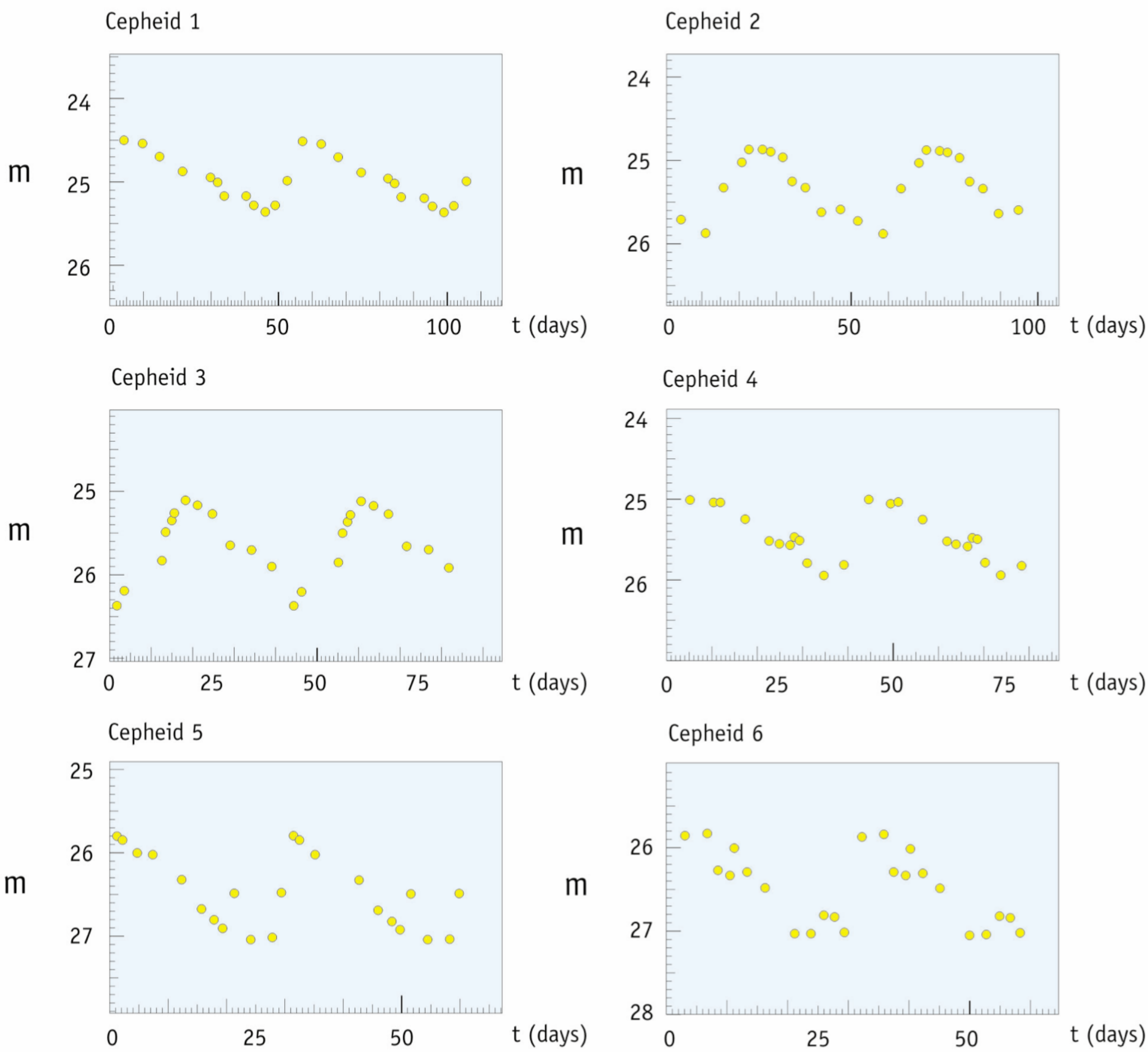

Figure 4: Curvas de luz de cefeidas em M100

a) Determina o período de pulsação (em dias) e a magnitude aparente média para cada estrela. Organiza a informação numa tabela.

b) Usa a relação período-luminosidade abaixo para calcular a magnitude absoluta de cada estrela. Adiciona os valores calculados para M à tabela.

$M = -2.78 \log (P) - 1.35$

c) Calcula a distância em parsec para cada estrela e adiciona os valores calculados à tabela.

d) Determina o valor mais provável da distância a M100 e fornece uma estimativa de incerteza.

Cepheid number	t2	t1	period = t2-t1	M	m max	m min	m average	D Mpc
1	100.0	46.5	53.5	-6.15	24.50	25.30	24.90	16.25
2	58.5	11.0	47.5	-6.01	24.90	25.90	25.40	19.15
3	61.0	18.5	42.5	-5.88	25.10	26.40	25.75	21.15
4	74.0	35.0	39.0	-5.77	25.00	25.95	25.48	17.77
5	50.0	19.0	31.0	-5.50	25.80	27.05	26.43	24.22
6	50.0	21.0	29.0	-5.42	25.80	27.10	26.45	23.61

Figure 5: Solução da questão 2

Solução:

Os valores dos períodos podem ser obtidos diretamente das figuras, e permitem o cálculo das magnitudes absolutas M.
As figuras também permitem estimar o valor médio das magnitudes aparentes. A partir desses valores calcula-se a distância através da fórmula
m - M = 5 log D - 5
O valor mais provável é a média aritmética das distâncias individuais,
$\overline{D} = 20,4$ Mpc

e a incerteza pode ser estimada a partir do desvio padrão do valor médio

$\overline{\sigma_D} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{12}} = 1,3$ Mpc

A tabela a seguir resume os resultados esperados.

Tabela de Dados:

Constantes Universais

- Velocidade da luz (vazio): $c = 3 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- Constante gravitacional: $G = 6.673 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^{2}\,kg^{-2}}$
- Constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{2}\,K^{-4}}$
- Constante de dispersão de Wien: $b = 2.8976 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$
- massa de um protão: $m_p = 1.6726 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Dados sobre o Sol

- Massa do Sol: $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- Raio do Sol: $R_{\odot} = 6.955 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$
- Período médio de rotação do sol: $T = 27$ dias
- Luminosidade do Sol: $L_{\odot} = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$
- Magnitude Absoluta Visual do Sol: $M_{\odot} = +4.83$ mag
- Temperatura superficial do Sol: $T_{\mathrm{ef}} = 5780\,\mathrm{K}$

Dados sobre a Terra

- Massa da Terra: $M_{\oplus} = 5.972 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- Raio da Terra: $R_{\oplus} = 6371 \times 10^{3}\,\mathrm{m}$

Dados sobre a Lua

- Massa da Lua: $M_{☾} = 7.348 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}$
- Raio da Lua: $R_{☾} = 1738 \times 10^{3}\,\mathrm{m}$

Conversão de unidades

- Unidade Astronómica (UA): $1\,\mathrm{UA} = 1.49 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
- Parsec (pc): $1\,\mathrm{pc} = 3.086 \times 10^{16}\,\mathrm{m}$
- Ano-luz (ly): $1\,\mathrm{ly} = 9.46 \times 10^{15}\,\mathrm{m}$

Relações importantes

- Velocidade angular $\Omega = \dfrac{2\pi}{T}[\mathrm{rad\,s^{-1}}]$
- Lei de Stefan-Boltzmann: $L = 4\pi R^{2}\sigma T_{ef}^{4}$
- Distância em parsec: $d_{pc} = 10^{\frac{m-M+5}{5}}$
- Magnitude absoluta: $M = -2,5\log(L) + K$, em que K é uma constante

- Lei da Gravitação Universal: $F_g = G\frac{Mm}{r^2}$
- Lei de Wien: $\lambda_{max} = \frac{b}{T}$
- Lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$